



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

# Representação Geométrica e Modelação Numérica do Escoamento no Rotor de uma Turbina de Ar Auto-Rectificadora de Tipo Radial para Aplicações em Energia das Ondas

Francisco Manuel Pinto Leite Braamcamp de Figueiredo

Dissertação submetida para a Universidade do Porto  
para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Setembro de 2013



*Ao Avô Tito*





# Resumo

Uma nova turbina auto-rectificadora, cujo rotor tem entrada e saída radiais, tem vindo a ser desenvolvida no Instituto Superior Técnico para aproveitamento da energia das ondas por coluna de água oscilante.

Neste trabalho é apresentada a modelação numérica do rotor da turbina e do escoamento ao longo das suas pás. Pretende-se que a geometria do rotor possa ser alvo de optimização, pelo que a modelação do escoamento tem de ser feita em função da geometria que, por sua vez, tem de ser parametrizada. São estes parâmetros que poderão ser alvo de optimização, nomeadamente recorrendo a algoritmos de optimização. Todo este processo tem de ser feito de forma automática e comandado pelo algoritmo de optimização que insere os parâmetros no gerador de geometria que, a seu turno, passa a geometria para o gerador de malha e que, por sua vez, passa a malha para o modelador do escoamento, de onde se retiram as informações pretendidas.

Para o cálculo do escoamento foi utilizado um código comercial de CFD, baseado no método de volumes finitos, para a integração das equações *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*.

Foi desenvolvido um método de geração de malha a partir de geometrias parametrizadas.

**Palavras-chave:** energia das ondas, coluna de água oscilante, métodos numéricos, turbina biradial, geração automática de malha



# Abstract

A new self-rectifying air turbine for applications in wave energy conversion by oscillating-water-column devices is being developed at Instituto Superior Técnico, Lisbon. The turbine is of impulse type, with radial flow at rotor inlet and outlet.

The study presents the numerical modelling of the flow through the turbine rotor. It is intended that the rotor geometry could be optimized, so that the flow modeling must be done in such a way that it depends on the geometry, which has to be parametrized. These are the parameters that can be optimized, namely using optimization algorithms. All this process has to be done in an automatic way and headed by the optimization algorithm that inputs the parameters in the geometry generator that sends the geometry to the mesh generator that, on its turn, sends the mesh to the flow modeler. From the flow modeler, one can take the desired informations about the flow.

The flow calculations were performed with a comercial CFD software, based on the finite volume method to integrate the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations.

A mesh generating method from parametric geometries was developed.

**Key-words:** wave energy, oscilating water column, numerical methods, biradial turbine, automatic mesh generation



# Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao Professor José Laginha que facilitou e permitiu esta experiência diferente e que sempre tão prestável se mostrou.

Agradeço ao Professor Luís Gato por me ter aceitado, por ter proposto e por ter orientado esta dissertação que se revelou um grande desafio ao qual espero ter correspondido.

Ao Professor António Falcão com quem foi um privilégio ter contactado e com quem qualquer conversa se transforma numa verdadeira lição e numa grande dose de sentido de humor.

Gostaria de agradecer especialmente ao Doutor João Henriques, antes de mais, por me ter recebido ao longo deste meio ano como colega de gabinete e, também, por todo o acompanhamento dado ao longo do trabalho assim como pelos códigos cedidos, sem os quais este não teria sido possível.

Agradeço, também, ao Carlos Rodrigues que também me recebeu no gabinete e que sempre se dispôs a esclarecer as minhas dúvidas.



# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>Conteúdo</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Aspectos gerais . . . . .	1
1.2 Energia das ondas . . . . .	2
1.2.1 Coluna de água oscilante . . . . .	4
1.2.2 Turbina biradial . . . . .	5
1.3 Objectivos . . . . .	8
<b>2 Geração da geometria parametrizada</b>	<b>9</b>
2.1 Introdução . . . . .	9
2.2 Curvas parametrizadas . . . . .	10
2.2.1 Curvas de Bézier . . . . .	11
2.2.2 Splines . . . . .	15
2.3 Desenho do rotor . . . . .	19
2.3.1 Desenho do cubo e da caixa exterior . . . . .	19
2.3.2 Desenho da pá . . . . .	22
2.4 Intersecções . . . . .	27
2.4.1 Método de Newton . . . . .	29
2.4.2 Método da Bisseccção . . . . .	31
2.4.3 Implementação do Método de Newton conjugado com o Método da Bisseccção . . . . .	32
2.5 Parâmetros que definem a geometria . . . . .	34
<b>3 Geração da malha</b>	<b>37</b>
3.1 Introdução . . . . .	37
3.2 Malhas de cálculo . . . . .	37

3.2.1	Malhas estruturadas . . . . .	39
3.2.2	Malhas não estruturadas . . . . .	40
3.2.3	Malhas híbridas . . . . .	40
3.3	Construção da malha . . . . .	41
3.3.1	Malha em torno da pá . . . . .	43
3.3.2	Malha nas regiões das camadas limite do cubo e da caixa exterior	45
3.3.3	Malha no núcleo do escoamento . . . . .	47
3.3.4	Parâmetros que definem a malha . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Modelação Numérica</b>	<b>51</b>
4.1	Introdução . . . . .	51
4.2	Mecânica dos fluidos computacional . . . . .	51
4.2.1	Fluent . . . . .	52
4.2.2	Equações de transporte . . . . .	53
4.2.3	Referencial móvel . . . . .	54
4.2.4	Modelos de turbulência . . . . .	56
4.2.5	Métodos numéricos . . . . .	58
4.3	Análise do escoamento no rotor . . . . .	61
4.4	Geometria inicial . . . . .	64
4.5	Condições de projecto . . . . .	65
4.6	Definição das condições de fronteira . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>69</b>
5.1	Introdução . . . . .	69
5.2	Análise numérica . . . . .	69
5.2.1	Verificação dos valores do parâmetro $y^+$ . . . . .	70
5.2.2	Critérios de convergência . . . . .	71
5.3	Escolha do número de pás . . . . .	73
5.4	Análise do escoamento para 11 pás . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>83</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>85</b>
	<b>Figuras</b>	<b>89</b>
.1	Velocidade radial nas superfícies periódicas . . . . .	89
.2	Pressão estática na superfície da pá . . . . .	93
.3	Velocidade relativa à entrada do rotor . . . . .	97
.4	Velocidade relativa à saída do rotor . . . . .	101
.5	Perfis das velocidades relativas na secção de saída do rotor . . . . .	105
	<b>Códigos</b>	<b>109</b>
.6	Método de Newton para o cálculo das intersecções . . . . .	110
.7	Método da bissecção para a determinação do parâmetro $s$ inicial . . . . .	111
.8	Expansão da pá para a criação da malha do tipo O . . . . .	112



# Lista de Figuras

1.1	Distribuição do fluxo médio de energia armazenada nas ondas em [MW/km] (Starzmann, 2012) . . . . .	3
1.2	Representação esquemática de um dispositivo CAO flutuante (Rodrigues, 2009) . . . . .	5
1.3	Turbina biradial na versão com as pás directrizes móveis (Falcão et al., 2013b) . . . . .	6
1.4	Turbina biradial na versão com as pás directrizes fixas e afastadas (Falcão et al., 2013b) . . . . .	7
1.5	Representação do rotor da turbina biradial (Falcão et al., 2013b) . . . . .	8
2.1	Representação dos polinómios da base quadrática de Bernstein (Ko et al., 2003) . . . . .	14
2.2	Representação de uma curva de Bézier quadrática (Ko et al., 2003) . . . . .	14
2.3	Representação de dois troços de um spline e dos respectivos vértices (Ko et al., 2003) . . . . .	17
2.4	Representação da construção das geratrizes do cubo (h) e da caixa exterior (s) . . . . .	20
2.5	$r(s)$ da linha média do cubo . . . . .	22
2.6	$z(s)$ da linha média do cubo . . . . .	22
2.7	$\theta(s)$ da linha média do cubo . . . . .	23
2.8	$\gamma'(s)$ da linha média do cubo . . . . .	23
2.9	Representação tridimensional da linha média do cubo discretizada . . . . .	24
2.10	Representação do parâmetro $s$ e do parâmetro $u$ . . . . .	25
2.11	Representação da função de distribuição de espessura do cubo discretizada . . . . .	25
2.12	Representação do referencial local para distribuição de espessura . . . . .	26
2.13	Intersecções . . . . .	29
2.14	Geometria do rotor da turbina biradial . . . . .	35
3.1	Esquema <i>cell centered</i> (Blazek, 2005) . . . . .	38
3.2	Esquema <i>cell vertex</i> (Blazek, 2005) . . . . .	38
3.3	Malha com crescimento uniforme (Anderson, 1995) . . . . .	39
3.4	Malha com crescimento não uniforme (Anderson, 1995) . . . . .	39
3.5	Malha do tipo C (a), do tipo O (b) e do tipo H (c) (Lermusiaux, 2011) . . . . .	40
3.6	Pormenor de uma malha híbrida bidimensional (Marçal, 2012) . . . . .	41
3.7	Camada exterior da malha da pá . . . . .	44
3.8	Camadas da malha da pá . . . . .	44
3.9	Malha da pá completa . . . . .	44

3.10	Divisão de um hexaedro em cinco pirâmides (Kallinderis and Kavouklis, 2005) . . . . .	44
3.11	Superfície do domínio no espaço real . . . . .	46
3.12	Superfície do domínio no espaço transformado . . . . .	46
3.13	Malha no espaço transformado . . . . .	47
3.14	Malha no espaço real . . . . .	47
3.15	Pormenor da malha do domínio completa . . . . .	49
4.1	Triângulos de velocidades à entrada (esquerda) e à saída (direita) do rotor (Falcão et al., 2013b) . . . . .	61
4.2	Triângulos de velocidades à entrada (esquerda) e à saída (direita) do rotor em condições nominais (Falcão et al., 2013b) . . . . .	62
5.1	Valores do $y^+$ para a pá no caso com 7 pás e $\phi$ de 0.08 para a malha mais refinada . . . . .	70
5.2	Valores do $y^+$ para a pá no caso com 15 pás e $\phi$ de 0.08 . . . . .	70
5.3	Valores do $y^+$ para o cubo no caso com 15 pás e $\phi$ de 0.08 . . . . .	71
5.4	Resíduos para o caso com 7 pás, $\phi$ de 0.08 e malha mais refinada (malha 1) . . . . .	71
5.5	Resíduos para o caso com 11 pás, $\phi$ de 0.08 (malha 3) . . . . .	72
5.6	Caudal à saída para o caso com 11 pás e $\phi$ de 0.08 (malha 3) . . . . .	72
5.7	Pressão à saída para o caso com 11 pás e $\phi$ de 0.08 (malha 3) . . . . .	73
5.8	Curvas de rendimento para diferentes números de pás . . . . .	74
5.9	Velocidade na fronteira periódica para 11 pá e $\phi = 0.25$ . . . . .	75
5.10	Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 7 pás . . . . .	75
5.11	Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás . . . . .	76
5.12	Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 15 pás . . . . .	76
5.13	Contornos da componente tangencial da velocidade relativa na superfície periódica do rotor com 7 pás . . . . .	77
5.14	Contornos da componente tangencial da velocidade relativa na superfície periódica do rotor com 11 pás . . . . .	78
5.15	Contornos da componente tangencial da velocidade relativa na superfície periódica do rotor com 15 pás . . . . .	78
5.16	Pormenor da velocidade relativa à saída na superfície periódica do rotor com 11 pás e $\phi = 0.25$ . . . . .	79
5.17	Gráfico da força de corte na pá em função de $\phi$ . . . . .	80
5.18	Pormenor da velocidade relativa na superfície periódica do rotor com 11 pás e $\phi = 0.05$ à entrada . . . . .	81
1	Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e $\phi = 0.05$ . . . . .	89
2	Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e $\phi = 0.06$ . . . . .	90
3	Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e $\phi = 0.07$ . . . . .	90
4	Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e $\phi = 0.08$ . . . . .	90
5	Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e $\phi = 0.1$ . . . . .	91
6	Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e $\phi = 0.1125$ . . . . .	91
7	Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e $\phi = 0.132$ . . . . .	91
8	Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e $\phi = 0.15$ . . . . .	92
9	Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e $\phi = 0.175$ . . . . .	92
10	Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e $\phi = 0.25$ . . . . .	92

11	Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e $\phi = 0.05$ . . . .	93
12	Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e $\phi = 0.06$ . . . .	93
13	Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e $\phi = 0.07$ . . . .	94
14	Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e $\phi = 0.08$ . . . .	94
15	Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e $\phi = 0.1$ . . . .	94
16	Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e $\phi = 0.1125$ . .	95
17	Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e $\phi = 0.132$ . . .	95
18	Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e $\phi = 0.15$ . . . .	95
19	Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e $\phi = 0.175$ . . .	96
20	Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e $\phi = 0.25$ . . . .	96
21	Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e $\phi = 0.05$	97
22	Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e $\phi = 0.06$	97
23	Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e $\phi = 0.07$	98
24	Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e $\phi = 0.08$	98
25	Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e $\phi = 0.1$ .	98
26	Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e $\phi = 0.1125$	99
27	Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e $\phi = 0.132$	99
28	Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e $\phi = 0.15$	99
29	Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e $\phi = 0.175$	100
30	Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e $\phi = 0.25$	100
31	Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.05$ . .	101
32	Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.06$ . .	101
33	Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.07$ . .	102
34	Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.08$ . .	102
35	Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.1$ . . .	102
36	Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.1125$ .	103
37	Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.132$ .	103
38	Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.15$ . .	103
39	Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.175$ .	104
40	Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.25$ . .	104
41	Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.05$	105
42	Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.06$	105
43	Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.07$	106
44	Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.08$	106
45	Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.1$ .	106
46	Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.1125$	107
47	Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.132$	107
48	Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.15$	107
49	Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.175$	108
50	Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e $\phi = 0.25$	108



# Lista de Tabelas

3.1	Esquema de malhas utilizado . . . . .	43
4.1	Valores do número de Courant e dos factores de relaxação utilizados ao longo do processo iterativo . . . . .	59
4.2	Esquemas de discretização utilizados nos cálculos numéricos . . . . .	61
5.1	Dimensão das malhas geradas . . . . .	69
5.2	Forças de corte nas superfícies das pás para os diferentes números de pás . . . . .	77
5.3	Forças de corte nas superfícies das pás, para 11 pás e diferentes $\phi$ 's . . . . .	80



# Nomenclatura

## Abreviaturas

2D	=	espaço a duas dimensões
3D	=	espaço a três dimensões
CAO	=	Coluna de Água Oscilante
CFD	=	do Inglês <i>Computational Fluid Dynamics</i>
DEM	=	Departamento de Engenharia Mecânica
I&D	=	Investigação de Desenvolvimento
IEA	=	do Inglês <i>International Energy Agency</i>
IST	=	Instituto Superior Técnico
MFC	=	Mecânica dos Fluidos Computacional
MVF	=	Método dos Volumes Finitos
NACA	=	do Inglês <i>National Advisory Committee for Aeronautics</i>
PRESTO!	=	do Inglês <i>PREssure STaggering Option</i>
QUICK	=	do Inglês <i>Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics</i>
RANS	=	equações de Navier-Stokes em média memporal de Reynolds para o campo médio (do Inglês <i>Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations</i> )
RSM	=	do Inglês <i>Reynolds Stress Models</i>
SST	=	do Inglês <i>Shear Stress Transport</i>

## Símbolos Romanos

$A$	=	área
$\mathbf{a}$	=	matriz de coeficientes das curvas polinomiais
$b$	=	altura da secção de entrada (e de saída) do rotor
$B_{i,n}$	=	polinómio $i$ de Bernstein de grau $n$
$D$	=	diâmetro
$D_h$	=	diâmetro hidráulico
$\mathbf{D}_f$	=	matriz das derivadas parciais
$E$	=	energia total específica
$F$	=	vector de forças
$\mathbf{f}$	=	vector de funções
$\mathbf{g}$	=	vector aceleração da gravidade
$G_k$	=	geração de energia cinética turbulenta
$k$	=	energia cinética turbulenta

$K$	=	curvatura local
$N_{i,4}$	=	polinómio $i$ de quarta ordem
$\mathbf{n}$	=	vector normal à superfície
$p$	=	pressão
$\mathbf{P}$	=	vector posição dos pontos a interpolar
$Q$	=	caudal volúmico
$R$	=	raio
$\mathbf{R}$	=	vector posição
$Re$	=	número de Reynolds
$R_{ij}$	=	tensores de Reynolds
$s$	=	parâmetro das curvas paramétricas
$S_m$	=	fonte de matéria
$S_k, S_\omega$	=	termos fonte de $k$ e de $\omega$
$t$	=	parâmetro das curvas paramétricas, tempo
$T$	=	binário, temperatura absoluta
$u$	=	parâmetro das curvas paramétricas
$\mathbf{u}$	=	vector com as componentes da velocidade de transporte
$U$	=	norma do vector $\mathbf{u}$
$V$	=	volume, norma do vector $\mathbf{v}$
$V_m$	=	componente radial da velocidade absoluta
$\mathbf{v}$	=	vector de variáveis independentes
$\mathbf{V}$	=	vector posição dos vértices dos splines
$v_\tau$	=	velocidade de fricção
$v_x, v_y, v_z$	=	velocidade do escoamento na direcção das coordenadas $x, y$ e $z$
$\mathbf{v}$	=	vector formado pelas componentes da velocidade $v_x, v_y$ e $v_z$
$w_x, w_y, w_z$	=	velocidade relativa do escoamento na direcção das coordenadas $x, y$ e $z$
$\mathbf{w}$	=	vector com as componentes da velocidade relativa $w_x, w_y$ e $w_z$
$W$	=	norma do vector $\mathbf{w}$
$x, y, z$	=	coordenadas cartesianas $x, y$ e $z$
$y^+$	=	distância adimensional à parede
$Y_k, Y_\omega$	=	dissipação de $k$ e de $\omega$

## Símbolos Gregos

$\alpha$	=	ângulo entre a velocidade absoluta e a direcção circunferencial do rotor
$\beta$	=	ângulo entre a velocidade relativa e a direcção circunferencial do rotor
$\gamma$	=	ângulo entre a velocidade relativa e a direcção radial do rotor
$\Gamma_k, \Gamma_\omega$	=	difusividade de $k$ e de $\omega$
$\Delta t$	=	intervalo de tempo
$\delta_{ij}$	=	delta de Kronecker
$\partial$	=	derivada parcial
$\eta$	=	rendimento
$\rho$	=	massa volúmica do ar



$\mu$	=	viscosidade dinâmica do ar
$\mu_t$	=	viscosidade turbulenta do ar
$\nu$	=	viscosidade cinemática do ar
$\omega$	=	taxa de dissipação específica da energia cinética de turbulência
$\Omega$	=	vector formado pelas componentes da velocidade de rotação $\Omega_x$ , $\Omega_y$ e $\Omega_z$
$\Omega$	=	norma do vector $\Omega$
$\phi$	=	quantidade escalar genérica, coeficiente de caudal
$\bar{\phi}$	=	valor médio da quantidade escalar genérica para RANS
$\phi'$	=	valor da flutuação da quantidade escalar genérica para RANS
$\tau_w$	=	tensão de corte na parede
$\theta$	=	coordenada cilíndrica $\theta$
$\xi$	=	versor do referencial ortonormado local
$\xi'$	=	versor auxiliar
$\eta$	=	versor do referencial ortonormado local
$\zeta$	=	versor do referencial ortonormado local



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Aspectos gerais

O presente trabalho surge na sequência da aposta na investigação que tem sido feita pelo Departamento de Engenharia Mecânica (DEM) do Instituto Superior Técnico (IST), desde 1977, com o objectivo de desenvolver sistemas para aproveitamento da energia das ondas com a sua conversão em energia eléctrica. Insere-se num projecto que se tem vindo a desenvolver no IST nos últimos anos e que visa desenvolver uma nova turbina pensada e desenhada para ser implementada em sistemas de coluna da água oscilante (CAO): a turbina biradial. Este projecto surge em paralelo com um segundo, que tem por objectivo o desenvolvimento de um sistema de CAO inovador, em que a câmara de ar é inserida num dispositivo flutuante (Gomes et al., 2012b) que torna o desenvolvimento desta turbina ainda mais interessante e necessário dadas as características que esta apresenta, que serão aprofundadas mais à frente na secção 1.2.2 e que a tornam particularmente indicada para a utilização neste novo sistema em particular e nos sistemas de CAO em geral.

Neste primeiro capítulo é feita uma pequena introdução à energia das ondas que é apresentada como uma fonte de energia limpa e renovável, conceitos estes que também serão abordados e questionados. Será efectuada uma análise da situação energética global e, dentro da energia das ondas, será dado destaque aos sistemas de CAO e, particularmente, ao sistema de CAO flutuante que está a ser desenvolvido no IST e será, então, apresentada a turbina biradial e analisada a forma como esta turbina pode satisfazer as exigências dos sistemas de CAO. Por fim, serão apresentados os principais objectivos deste trabalho.

No Capítulo 2 será explicada detalhadamente a forma como foi gerada a geometria parametrizada do rotor da turbina biradial. Trata-se de um capítulo que aborda uma área da engenharia denominada geometria computacional. Serão fornecidas as bases teóricas acerca das ferramentas utilizadas e será explicada a forma como estas foram utilizadas no caso concreto do desenho do rotor.

O Capítulo 3 explica como é que, a partir da geometria gerada no capítulo

anterior, se gera um domínio de cálculo apropriado e pronto a determinar os valores das grandezas no interior do domínio, partindo de um sistema de equações que determina a forma como uma quantidade evolui no espaço e no tempo e impondo o valor dessas quantidades nas fronteiras. A este domínio de cálculo discretizado dá-se o nome de malha.

O Capítulo 4 aborda a forma como foi modelado o escoamento através do rotor. Trata-se da determinação do sistema de equações referido no último parágrafo e das técnicas utilizadas na sua resolução. Para isso é efectuada uma primeira análise física do escoamento entre a entrada e a saída, são definidos todos os modelos numéricos utilizados e impõem-se as condições nas fronteiras do domínio de cálculo.

No Capítulo 5 são apresentados alguns resultados dos cálculos efectuados e é feita uma análise mais detalhada do escoamento no interior do rotor.

No Capítulo 6 são, por fim, apresentadas as principais conclusões deste trabalho assim como algumas notas acerca do trabalho realizado e sugestões para trabalhos futuros.

## 1.2 Energia das ondas

Desde a década de 70, com as duas crises do petróleo, que tem sido feito um esforço, nomeadamente no campo da Investigação e Desenvolvimento (I&D), por forma a permitir a viabilidade de fontes de energia alternativas aos tradicionais combustíveis fósseis (carvão, petróleo e gás natural) que têm dominado o paradigma energético desde a Revolução Industrial, no início do século XIX até aos dias de hoje. No ano de 2010, segundo a Agência Internacional de Energia, 81% da energia 'consumida' foi proveniente de combustíveis fósseis (IEA, 2013). As fontes de energia ditas renováveis<sup>1</sup> surgiram, no contexto dos anos 70, como uma alternativa interessante. Ao problema da altura, que se poderia caracterizar de sustentabilidade material (e, consequentemente, de sustentabilidade económica), veio-se acrescentar, nos últimos anos, o problema de sustentabilidade ambiental. Este novo problema veio trazer um novo fôlego ao desenvolvimento de novas formas de disponibilizar energia de forma útil.

Uma das fontes de energia renováveis disponível com grande abundância no Planeta é, sem dúvida, as ondas dos oceanos. Estas têm a sua origem no efeito do vento sobre a superfície dos oceanos, pelo que não são mais do que uma forma indirecta de energia solar. Poder-se-ia pensar que, sendo assim, faria mais sentido captar directamente a energia do vento, nomeadamente como tem

---

<sup>1</sup>Entende-se por fontes de energia renováveis, isto é inesgotáveis, aquelas cuja durabilidade se prevê 'infinita' à escala da existência da Humanidade ou cuja reposição possa ser feita a um ritmo da mesma ordem que o seu consumo.

sido efectuado com a colocação de turbinas eólicas *offshore*, mas, na verdade, as ondas servem como meio de transporte desta energia a partir de locais onde nunca seria possível esta solução para locais onde é possível o seu aproveitamento, necessariamente já em forma de ondas. Estima-se que a nível mundial haja um potencial médio para aproveitamento desta energia das ondas de cerca de 2 TW (Falcão, 2007). O fluxo médio anual de energia das ondas ao largo da costa ocidental portuguesa é da ordem dos 40 MW/km, como se pode ver na Figura 1.1, e espera-se que o aproveitamento desta energia, para ser tecnicamente viável, se possa situar entre 2 e 3 GW (Falcão, 2007). Para se ter uma ideia do que isto representa, a capacidade eólica instalada neste momento em Portugal ronda os 4 GW e consegue suprir cerca de um quarto das necessidades eléctricas do país.

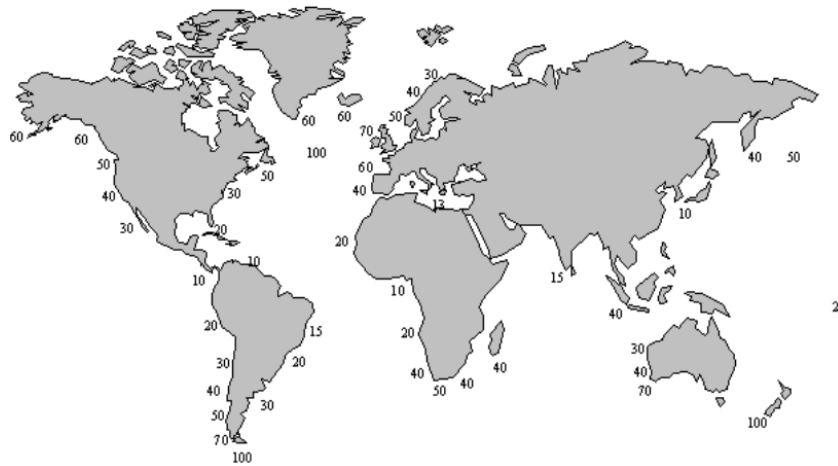


Figura 1.1: Distribuição do fluxo médio de energia armazenada nas ondas em [MW/km] (Starzmann, 2012)

Apesar deste potencial, o seu aproveitamento é praticamente nulo. Tal deve-se ao facto de a tecnologia disponível para o seu aproveitamento ser ainda pouco madura, o que faz com que exista uma grande diversidade de conceitos em que nenhum se sobrepõe aos restantes. Isto tem como consequência que não seja para já interessante a exploração de nenhum dos conceitos disponíveis a um nível industrial que permita a sua rentabilização. Embora haja tecnologias para outras fontes já muito desenvolvidas que até as tornam, em certas condições, competitivas com os combustíveis fósseis, se se tiver em conta que, neste momento, mais de 80% da electricidade consumida a nível mundial é produzida a partir de fontes de energia não renováveis (em que 13% é nuclear) chega-se facilmente à conclusão de que há ainda uma grande quota de mercado ao alcance da energia das ondas (IEA, 2013).

### 1.2.1 Coluna de água oscilante

Para o aproveitamento da energia das ondas existem várias soluções possíveis. Estas vão desde sistemas mecânicos até sistemas pneumáticos e passando por sistemas hidráulicos. Este trabalho terá como alvo uma turbina para aplicação em sistemas pneumáticos, os sistemas de CAO. Esta é, de resto, a forma de aproveitamento de energia das ondas que mais tem sido estudada e que se tem mostrado mais fiável ao longo dos últimos anos (Falcão et al., 2013b).

Este sistema não é mais do que uma câmara de ar de volume variável em que a superfície livre da água funciona como êmbolo. A superfície livre da água, ao subir e descer dentro da câmara devido ao movimento oscilatório das ondas, provoca uma sobrepressão ou uma subpressão (conforme se tratar de uma diminuição ou de um aumento do volume da câmara de ar em relação ao volume de equilíbrio) obrigando o ar a circular através de uma turbina que terá de ser instalada entre a câmara e o exterior. Assim, uma das extremidades da turbina encontra-se à pressão do interior da câmara e a outra extremidade encontra-se à pressão atmosférica. Um gerador deverá ser acoplado à turbina por forma a transformar a energia mecânica no veio desta em energia eléctrica. Uma vez que o fluxo de ar resultante é bidireccional e com a mesma frequência de oscilação que a onda que lhe dá origem, é importante que esta energia seja convertida nos dois sentidos sob pena de se estar, logo à partida, a reduzir o rendimento do sistema a 50%. Para conseguir este objectivo há essencialmente duas soluções. A primeira é recorrer a um sistema de válvulas rectificadoras que obrigariam a que o escoamento na turbina tivesse sempre o mesmo sentido, transformando-o em unidireccional, e a segunda é a própria turbina funcionar de igual modo, rodando e produzindo binário sempre no mesmo sentido, independentemente do sentido do escoamento, recebendo o nome de turbina auto-rectificadora. A primeira solução aparenta ser mais intuitiva mas tem sido evitada, se é que não foi mesmo abandonada. A sua não utilização deve-se a uma razão simples: para que as válvulas tivessem um efeito útil, os seus tempos de resposta teriam de ser muito baixos. Ora, para grandes caudais (os únicos que podem tornar um sistema deste tipo economicamente viável) seriam necessárias grandes válvulas que têm necessariamente grandes massas e que, como tal, obrigariam a grandes esforços e a sistemas complexos e pouco fiáveis (Falcão and Sayigh, 2012).

Há duas grandes famílias de CAO: as fixas e as flutuantes (Figura 1.2). As fixas, que existem há mais tempo, são incorporadas numa estrutura junto à costa (tipicamente em molhes ou em rochas) e têm a vantagem de serem, à partida, mais fiáveis, de terem uma instalação e manutenção mais fáceis e de serem estruturas mais simples. Por outro lado, as CAO flutuantes podem ser colocadas onde as ondas são mais energéticas: no alto mar. A isto acrescenta-se a possibilidade de se poder sintonizar estes sistemas para entrarem em ressonância com a ondulação o que permite extrair ainda mais energia, uma vez que se aumenta a amplitude do deslocamento da superfície livre dentro da câmara mas também a necessidade de amarrações e de instalação de cabos eléctricos submarinos.

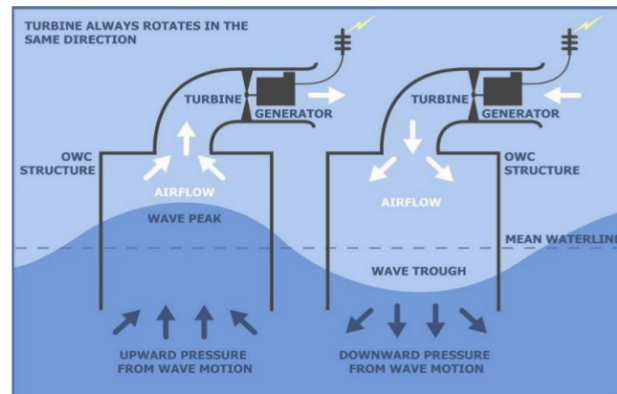


Figura 1.2: Representação esquemática de um dispositivo CAO flutuante (Rodrigues, 2009)

Das considerações efectuadas e tendo em conta o esquema apresentado na Figura 1.2 pode-se depreender algumas características necessárias para uma turbina adequada a ser utilizada em CAO. É necessário que a turbina trabalhe com um bom rendimento numa ampla gama de caudais (uma vez que a amplitude das ondas é muito variável), que seja robusta e fiável com o mínimo de componentes móveis possível e, no caso da CAO flutuante, que seja o mais compacta possível axialmente uma vez que é conveniente, por uma questão de estabilidade, que o centro de massa do sistema seja o mais baixo possível. Algumas turbinas têm vindo a ser desenvolvidas neste âmbito, com destaque para as turbinas Wells nas suas várias versões e para a turbina de impulso axial auto-rectificadora (Falcão and Sayigh, 2012), mas tanto uma como a outra apresentam alguns pontos fracos. As turbinas Wells têm um rendimento máximo que pode atingir os 75% mas, para uma determinada velocidade de rotação, mantêm um rendimento aceitável apenas numa gama de caudais reduzida. As turbinas de impulso auto-rectificadoras, que diferem das turbinas de impulso comuns na presença de um segundo conjunto de pás directrizes que torna as turbinas simétricas, já permitem operar numa gama mais alargada de caudais mas o seu rendimento não ultrapassa os 60%. É neste contexto que tem vindo a ser desenvolvida no IST, nos últimos anos, uma nova turbina pensada e desenhada para ser implementada em sistemas de CAO, a turbina biradial.

### 1.2.2 Turbina biradial

A turbina biradial foi patenteada pelo IST em 2010. Desde então tem vindo a ser desenvolvida e melhorada. Esta turbina apresenta, desde logo, duas características que a tornam extremamente atraente na aplicação em coluna de água oscilante: primeiro, a sua grande compactidade axial e, segundo, a facilidade de acoplar um volante de inércia.

O seu nome deve-se ao facto de o escoamento ter a direcção radial tanto à entrada desta como à sua saída. O rotor da turbina biradial é simétrico em relação a um plano perpendicular ao seu eixo de rotação e está rodeado por dois conjuntos de pás directrizes, um à entrada e outro à saída que estão ligados ao rotor por meio de uma conduta axisimétrica cujas paredes podem ser, se bem que não obrigatoriamente, dois discos planos (como apresentado na Figura 1.4) e que tem também a função de conduta de admissão que guia o escoamento mesmo antes de este chegar às pás directrizes. Devido à simetria do rotor, a velocidade relativa do ar à entrada da turbina é igual à velocidade relativa do ar à saída desta, o que é característico de uma turbina de impulso, ou turbina de acção (Falcão et al., 2013b).

Esta turbina está disponível em duas versões. Na primeira versão (Figura 1.3) as pás directrizes são móveis, movendo-se no sentido axial, podendo o seu accionamento ser efectuado por meio de um mecanismo extremamente simples. Na segunda versão (Figura 1.4) as pás directrizes são afastadas do rotor.

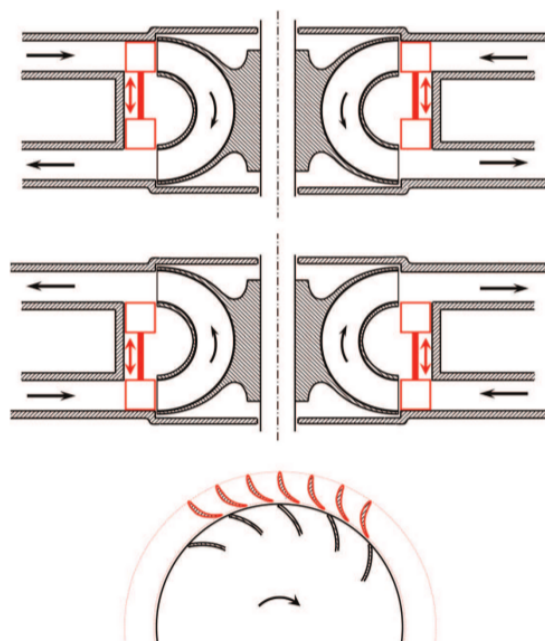


Figura 1.3: Turbina biradial na versão com as pás directrizes móveis (Falcão et al., 2013b)

O escoamento é admitido na turbina por uma das condutas axisimétricas sendo a direcção da sua velocidade neste ponto puramente radial. Uma vez chegado às pás directrizes, o escoamento é deflectido criando-se uma componente de velocidade circunferencial. Este ângulo de deflexão deverá ser tal que, quando o escoamento atinge o rotor, o ângulo da sua velocidade relativa (em relação ao rotor) coincida com o ângulo das pás para as condições de funcionamento nominais (este aspecto será abordado na secção 4.3). O ângulo da velocidade absoluta do escoamento conserva-se até à entrada no rotor, mesmo que se opte pela versão com as pás directrizes afastadas, tendo as linhas de cor-



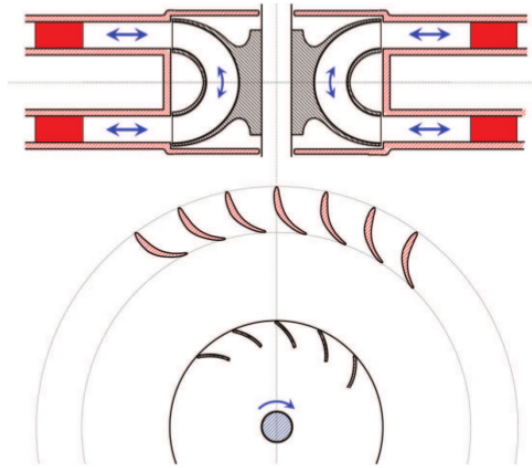


Figura 1.4: Turbina biradial na versão com as pás directrizes fixas e afastadas (Falcão et al., 2013b)

rente forma de espirais logarítmicas. No rotor pretende-se que esta componente circunferencial do escoamento seja absorvida, seja absorvida, o que, em conformidade com a equação de Euler das turbomáquinas (apresentada em (4.24)), vai produzir binário no veio. À saída do rotor, a componente circunferencial da velocidade absoluta do escoamento deve ser pequena. Depois de sair do rotor, o escoamento conserva novamente o seu ângulo de velocidade absoluta até sair da segunda conduta de admissão (que alternadamente, devido à característica bidireccional do escoamento, funciona como conduta de saída), no caso da versão com pás directrizes móveis, ou encontrar o segundo conjunto de pás directrizes, no caso da versão com pás directrizes fixas. Neste segundo caso o ângulo de incidência do escoamento nas pás vai ser muito alto o que provoca perdas por separação. Contudo, o afastamento das pás directrizes faz com que a velocidade do escoamento neste ponto seja baixa permitindo uma significativa redução destas perdas (Falcão et al., 2013b).

Assim, a turbina biradial, ao contrário de outras alternativas propostas (ver (Falcão et al., 2013b)), é compacta na direcção axial, é mecanicamente simples e fiável, permite lidar com estados do mar agitados resistindo a fortes oscilações de pressão e tem, à entrada do segundo conjunto de pás directrizes, perdas muito reduzidas (na versão das pás afastadas) ou até mesmo nulas (na versão das pás móveis) (Falcão et al., 2013b).

Na Figura 1.5 é representada uma versão do rotor da turbina biradial que resultou do trabalho de (Nunes, 2011).

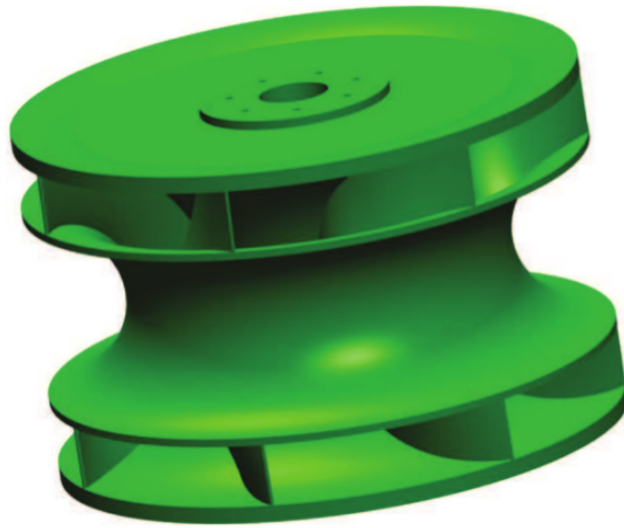


Figura 1.5: Representação do rotor da turbina biradial (Falcão et al., 2013b)

### 1.3 Objectivos

Com esta tese pretende-se criar ferramentas que permitam a optimização da geometria do rotor da turbina biradial. Será estudada a variante com as pás directrizes fixas e afastadas, mas pretende-se que as ferramentas criadas possam ser facilmente adaptadas à variante com as pás directrizes móveis. Destas ferramentas destaca-se a criação de um gerador de malha que permita gerar uma malha de forma automática partindo de uma geometria parametrizada.

Deverá ser criado um programa, em linguagem Python, que terá como *inputs* um número de parâmetros a determinar relativos à geometria do rotor e como *outputs* parâmetros integrais, ou eventualmente locais, que sejam relevantes na determinação de uma função objectivo que permita a optimização da geometria do rotor.

Será ainda modelado o escoamento no rotor da turbina biradial e este será analisado para várias condições de funcionamento, utilizando, para isso, o gerador de malha criado.

## Capítulo 2

# Geração da geometria parametrizada

### 2.1 Introdução

Neste capítulo pretende-se explicar o processo de geração da geometria do rotor assim como todos os conceitos que lhe estão subjacentes. Esta fase do trabalho enquadra-se numa área da engenharia que é a modelação geométrica computacional que tem como objecto de trabalho, como o nome indica, a modelação numérica de geometrias físicas partindo, como não podia deixar de ser, de modelos matemáticos.

Será sempre necessário ter em conta o principal objectivo deste módulo: gerar um conjunto de pontos de definem a geometria do rotor da turbina biradial, partindo de um determinado número de parâmetros, e que serão posteriormente utilizados como ponto de partida para a geração da malha. Pretende-se, portanto, que os parâmetros de entrada, que vão ser alvo de manipulação pelo algoritmo de optimização, sejam em menor número possível embora permitindo, ao mesmo tempo, a maior flexibilidade possível da geometria gerada sendo que esta será limitada, claro está, pelas condicionantes que definem a turbina biradial (ver (Falcão et al., 2013b)).

A geração da geometria estará, portanto, sujeita às seguintes condições:

- as superfícies do cubo e da caixa exterior são superfícies de revolução;
- a entrada e saída do escoamento no rotor têm de se fazer radialmente, pelo que as superfícies do cubo e da caixa exterior terão de ser, à entrada e à saída do rotor, tangentes a planos perpendiculares ao eixo de rotação do rotor;
- a turbina terá de ser simétrica em relação ao plano perpendicular ao eixo de rotação que o intersecta no ponto médio.

Para gerar a geometria do rotor recorrer-se-á a curvas parametrizadas pelos motivos que serão abordados na secção 2.2.

Todas as representações feitas ao longo deste capítulo são relativas à geometria da qual se partiu para a optimização e que se baseia na obtida por P. Nunes no seu trabalho que pode ser consultado em (Nunes, 2011).

## 2.2 Curvas parametrizadas

As curvas parametrizadas, ou paramétricas, são curvas que podem ser representadas através de uma função vectorial. As suas coordenadas são dadas em função de uma variável independente chamada parâmetro (geralmente  $t$ ). Por convenção, este parâmetro varia entre 0 e 1, o que será adoptado ao longo deste capítulo.

Um exemplo de curvas paramétricas muito comuns são as polinomiais. Na sua forma mais simples, a partir da base monomial e para 3 dimensões, podem ser definidas por:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_{0,0} + a_{0,1} t + a_{0,2} t^2 + \dots + a_{0,n} t^n \\ y(t) &= a_{1,0} + a_{1,1} t + a_{1,2} t^2 + \dots + a_{1,n} t^n \\ z(t) &= a_{2,0} + a_{2,1} t + a_{2,2} t^2 + \dots + a_{2,n} t^n \end{aligned} \quad (2.1)$$

Na notação vectorial vem:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \dots + \mathbf{a}_n t^n \quad (2.2)$$

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i t^i \quad (2.3)$$

em que  $\mathbf{R}(t)$  e  $\mathbf{a}_i$  são vectores de dimensão 3 compostos, respectivamente, por:

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{0,i} \\ a_{1,i} \\ a_{2,i} \end{bmatrix}$$

Continuando em 3 dimensões, considerando a matriz dos coeficientes  $\mathbf{a}$  de dimensão  $3 \times n$  e o vector coluna  $\mathbf{T}(t)$  de dimensão  $n$ :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0(t) \\ t_1(t) \\ t_2(t) \\ \vdots \\ t_n(t) \end{bmatrix}$$

pode-se, então, reescrever (2.2) na forma matricial:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}(t) \quad (2.4)$$

em que  $\mathbf{T}(t)$  constitui uma base, neste caso a base monomial, constituída pelas potências de 0 a  $n$  do parâmetro  $t$ .

Na verdade, um polinómio de grau  $n$  pode ser expresso numa infinidade de bases de polinómios, em que é condição necessária que os polinómios dessa base sejam compostos por termos que vão do grau 0 a um grau superior a  $n$  (Barbosa, 2005).

Chega-se, assim, a uma expressão para (2.3) mais geral:

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i t_i(t) \quad (2.5)$$

e pode-se reescrever (2.1), também numa forma mais geral:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_{0,0} t_0(t) + a_{0,1} t_1(t) + a_{0,2} t_2(t) + \dots + a_{0,n} t_n(t) \\ y(t) &= a_{1,0} t_0(t) + a_{1,1} t_1(t) + a_{1,2} t_2(t) + \dots + a_{1,n} t_n(t) \\ z(t) &= a_{2,0} t_0(t) + a_{2,1} t_1(t) + a_{2,2} t_2(t) + \dots + a_{2,n} t_n(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

As curvas paramétricas são de grande utilidade quando se pretende modelizar geometrias recorrendo a computadores. Isto porque são, de um modo geral, facilmente diferenciáveis e integráveis, facilmente adaptáveis à álgebra matricial e dando-se bem com transformações geométricas uma vez que são independentes do sistema de eixos (Shah and Mäntylä, 1995; Ko et al., 2003).

## 2.2.1 Curvas de Bézier

As curvas de Bézier são curvas paramétricas, geradas a partir de pontos de controlo, muito utilizadas na computação gráfica. Aliás, na sua origem estiveram as dificuldades sentidas pelo engenheiro francês Pierre Bézier, que trabalhava no

departamento de concepção da Renault, no desenho de automóveis (Shah and Mäntylä, 1995).

As curvas são polinomiais de grau  $n$  e geradas a partir de  $n + 1$  pontos de controlo. Tratando-se de curvas polinomiais podem, para 3 dimensões, ser definidas de acordo com (2.6):

$$\begin{aligned} x(t) &= a_{0,0} t_0(t) + a_{0,1} t_1(t) + a_{0,2} t_2(t) + \dots + a_{0,n} t_n(t) \\ y(t) &= a_{1,0} t_0(t) + a_{1,1} t_1(t) + a_{1,2} t_2(t) + \dots + a_{1,n} t_n(t) \\ z(t) &= a_{2,0} t_0(t) + a_{2,1} t_1(t) + a_{2,2} t_2(t) + \dots + a_{2,n} t_n(t) \end{aligned}$$

em que, no caso concreto das curvas de Bézier, cada coeficiente  $a_{k,i}$  vai corresponder à coordenada  $k$  do ponto de controlo  $i$  e cada um dos termos da base  $\mathbf{T}(t)$ ,  $t_i(t)$ , vai corresponder a um polinómio de Bernstein,  $B_{i,n}(t)$ , de grau  $n$ . Resulta, então, em:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 B_{0,n}(t) + x_1 B_{1,n}(t) + x_2 B_{2,n}(t) + \dots + x_n B_{n,n}(t) \\ y(t) &= y_0 B_{0,n}(t) + y_1 B_{1,n}(t) + y_2 B_{2,n}(t) + \dots + y_n B_{n,n}(t) \\ z(t) &= z_0 B_{0,n}(t) + z_1 B_{1,n}(t) + z_2 B_{2,n}(t) + \dots + z_n B_{n,n}(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

em que  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  e  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ , são, respectivamente, as coordenadas  $x, y$  e  $z$  de cada um dos pontos de controlo.

Na notação vectorial vem:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 B_{0,n}(t) + \mathbf{R}_1 B_{1,n}(t) + \mathbf{R}_2 B_{2,n}(t) + \dots + \mathbf{R}_n B_{n,n}(t) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{R}_i B_{i,n}(t) \quad (2.9)$$

Analisando bem a equação (2.9) verifica-se que esta não é mais do que a escrita de (2.3) numa base diferente. Esta base é, como já foi dito, formada pelos chamados polinómios de Bernstein. Para um aprofundamento acerca destes polinómios, aconselha-se a consulta de (Kenneth, 2000). Aqui vai apenas ser dada a sua definição e serão apresentadas as suas propriedades mais relevantes.

Definem-se como (Ko et al., 2003):

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (2.10)$$

onde

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

As suas propriedades mais relevantes (Ko et al., 2003):

- são positivos no domínio considerado:  $B_{i,n}(t) \geq 0$  em  $0 \leq t \leq 1$ ;
- são a partição da unidade:  $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = [(1-t) + t]^n = 1$  (pelo teorema do binómio de Newton);
- o polinómio  $i$  da base é simétrico em relação ao polinómio  $n-i$  em  $t = 0,5$ :  $B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$ .

Substituindo (2.10) em (2.9) obtém-se a expressão geral de uma curva de Bézier de grau  $n$ :

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{R}_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (2.11)$$

Na verdade, a curva de Bézier não é mais do que uma interpolação pesada dos vários pontos de controlo em que os factores de ponderação são os polinómios de Bernstein (ver Figura 2.1 e Figura 2.2). A cada ponto de controlo corresponde um polinómio de Bernstein cujo peso que lhe atribui varia em função de  $t$ , que é o parâmetro da curva. A curva de Bézier aproxima de forma suave o polígono formado pelos pontos de controlo (Ko et al., 2003).

Tomando o exemplo de uma curva de Bézier quadrática (grau  $n = 2$ ), esta vai ser definida por 3 pontos de controlo,  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$  ponderados pelos factores  $B_{0,2}(t)$ ,  $B_{1,2}(t)$  e  $B_{2,2}(t)$ :

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 (1-t)^2 + \mathbf{R}_1 2t(1-t) + \mathbf{R}_2 t^2 \quad (2.12)$$

Os factores de ponderação em  $0 \leq t \leq 1$  e uma curva de grau  $n = 2$  estão representados, respectivamente, na Figura 2.1 e na Figura 2.2.

De seguida, apresentam-se algumas propriedades das curvas de Bézier necessárias a ter em conta no desenvolvimento do trabalho (Ko et al., 2003):

1. *Condições geométricas nos extremos*: o primeiro ponto de controlo  $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  será o ponto de origem da curva e o último ponto  $\mathbf{R}_n = (x_n, y_n, z_n)$  o ponto de chegada da curva. A curva será tangente, na origem, à recta que une os

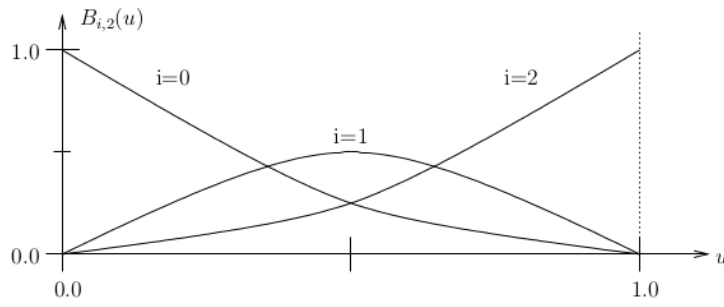


Figura 2.1: Representação dos polinômios da base quadrática de Bernstein (Ko et al., 2003)

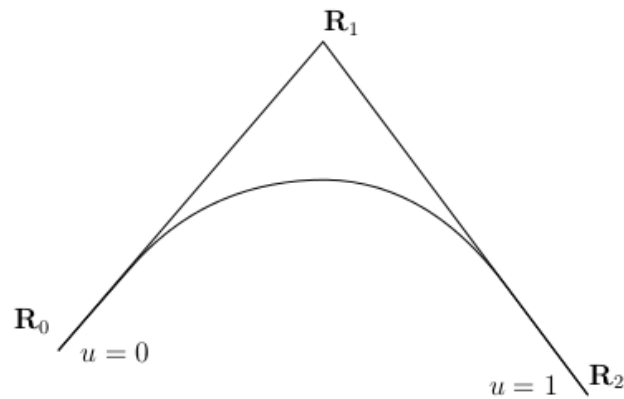


Figura 2.2: Representação de uma curva de Bézier quadrática (Ko et al., 2003)

dois primeiros pontos de controlo e, na chegada, à recta que une os dois últimos.

- $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$
- $\mathbf{R}(1) = \mathbf{R}_n$
- $\dot{\mathbf{R}}(0) = n (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0)$
- $\dot{\mathbf{R}}(1) = n (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_{n-1})$
- $\ddot{\mathbf{R}}(0) = n (n - 1) [(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) - (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0)]$
- $\ddot{\mathbf{R}}(1) = n (n - 1) [(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_{n-1}) - (\mathbf{R}_{n-1} - \mathbf{R}_{n-2})]$

2. *Condição de simetria:* se os pontos de controlo forem simétricos em relação a um eixo, então a curva também será simétrica em relação a esse mesmo eixo.
3. *Forma independente de transformações geométricas:* não só a forma da curva se mantém quando esta sofre uma translação ou uma rotação como essas transformações são extremamente simples uma vez que estas curvas são compatíveis com o cálculo matricial.



4. *Os pontos de controlo formam um fecho convexo da curva:* a curva aproxima a forma do polígono formado pelos pontos de controlo mas nunca o intersecta, estando contida nesse mesmo polígono.
5. *Continuidade de ordem  $n$ :* a curva é uma interpolação pesada dos  $n + 1$  pontos de controlo o que faz com que esta nunca oscile de forma não controlada através dos pontos de controlo definidos.

### 2.2.2 Splines

Os splines servem para interpolar entre pontos definidos. São curvas compostas por vários troços que têm continuidade na função e nas suas primeira e segunda derivadas, denominadas de continuidade  $C^0$ ,  $C^1$  e  $C^2$ , respectivamente.

A sua origem encontra-se na engenharia naval, no desenho de navios, que era feito com pequenos pedaços de material flexível com os quais, juntando-se, se construía a forma desejada (Strang, 2008).

No presente trabalho, cada um dos troços elementar, ao qual se dá habitualmente o nome de *B-spline* (proveniente de *basic spline*), será composto por uma curva parametrizada, polinomial e de grau 3 (cúbica). Aos splines assim formados dá-se o nome de splines cúbicos, que são os mais comuns uma vez que as curvas polinomiais de grau 3 são as curvas de menor grau que contêm um ponto de inflexão (em que a segunda derivada troca de sinal), propriedade esta que é muito útil quando se pretendem unir os diferentes troços e obter uma interpolação suave (House, 2011).

Os splines servirão, portanto, para interpolar os pontos resultantes da geração das curvas de Bézier e, assim, discretizá-las da forma pretendida.

Mais uma vez, tratando-se de curvas polinomiais, cada um dos troços pode, para 3 dimensões, ser definido de acordo com (2.6):

$$\begin{aligned} x(t) &= a_{0,0} t_0(t) + a_{0,1} t_1(t) + a_{0,2} t_2(t) + \dots + a_{0,n} t_n(t) \\ y(t) &= a_{1,0} t_0(t) + a_{1,1} t_1(t) + a_{1,2} t_2(t) + \dots + a_{1,n} t_n(t) \\ z(t) &= a_{2,0} t_0(t) + a_{2,1} t_1(t) + a_{2,2} t_2(t) + \dots + a_{2,n} t_n(t) \end{aligned}$$

em que, no caso concreto dos splines cúbicos, cada coeficiente  $a_{k,i}$  pode ser visto, tal como no caso das curvas de Bézier, como a coordenada  $k$  de um ponto de controlo  $i$  e cada um dos termos da base  $\mathbf{T}(t)$ ,  $t_i(t)$ , vai corresponder a um polinómio,  $N_{i,4}(t)$ , de grau 3 e ordem 4. No caso dos splines é habitual representar-se os polinómios da base com o índice da ordem e não do grau do polinómio.

Resulta, então, em (Ko et al., 2003):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 N_{0,4}(t) + x_1 N_{1,4}(t) + x_2 N_{2,4}(t) + x_3 N_{3,4}(t) \\ y(t) &= y_0 N_{0,4}(t) + y_1 N_{1,4}(t) + y_2 N_{2,4}(t) + y_3 N_{3,4}(t) \\ z(t) &= z_0 N_{0,4}(t) + z_1 N_{1,4}(t) + z_2 N_{2,4}(t) + z_3 N_{3,4}(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

em que  $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3$  e  $z_0, z_1, z_2, z_3$ , são, respectivamente, as coordenadas  $x, y$  e  $z$  de cada um desses pontos de controlo,  $\mathbf{V}_j$ , a que se dá o nome de vértices.

Na notação vectorial, acrescentando um índice  $j$  para cada troço do spline, vem (Ko et al., 2003):

$$\mathbf{R}_j(t) = \mathbf{V}_j N_{0,4}(t) + \mathbf{V}_{j+1} N_{1,4}(t) + \mathbf{V}_{j+2} N_{2,4}(t) + \mathbf{V}_{j+3} N_{3,4}(t) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{R}_j(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_{j+i} N_{i,4}(t) \quad (2.15)$$

em que  $t$  é um parâmetro local de cada troço que varia entre 0 e 1 ( $0 \leq t \leq 1$ ).

Analisando bem a equação (2.15) verifica-se, mais uma vez, que, tal como no caso das curvas de Bézier, esta não é mais do que a escrita de (2.3) numa base diferente. Esta base é formada pelos 4 polinómios  $N_{i,4}(t)$ , em que  $0 \leq i \leq 3$ :

$$N_{i,4}(t) = c_{i,0} + c_{i,1} t + c_{i,2} t^2 + c_{i,3} t^3 \quad (2.16)$$

$$N_{i,4}(t) = \sum_{k=0}^3 c_{i,k} t^k \quad (2.17)$$

Cada troço  $j$  do spline será, então, definido por uma expressão do tipo:

$$\mathbf{R}_j(t) = \sum_{i=0}^3 \left( \mathbf{V}_{j+i} \sum_{k=0}^3 c_{i,k} t^k \right) \quad (2.18)$$

Vê-se que cada troço é afectado por 4 vértices e, que, para definir  $N$  troços, que interpolam  $M = N + 1$  pontos, são necessários  $N + 3$  vértices pelo que, consequentemente, para interpolar  $M$  pontos são necessários  $M + 2$  vértices (ver Figura 2.3).

Analisando a expressão (2.18) verifica-se que as incógnitas que é necessário calcular para definir os splines são as coordenadas dos vértices  $\mathbf{V}_j$  e os coeficientes  $c_{i,k}$ . Cada vértice "acarreta" consigo uma incógnita, o conjunto das suas

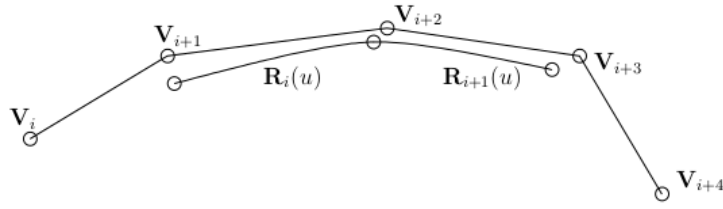


Figura 2.3: Representação de dois troços de um spline e dos respectivos vértices (Ko et al., 2003)

coordenadas, e a base "acarreta" consigo 16 incógnitas, uma para cada um dos coeficientes  $c_{i,k}$ , uma vez que são quatro polinómios de ordem 4 (grau 3), como se pode ver nas expressões que se seguem, que são o desenvolvimento de (2.16) para cada um dos 4 polinómios da base.

$$N_{0,4}(t) = c_{0,0} + c_{0,1} t + c_{0,2} t^2 + c_{0,3} t^3 \quad (2.19)$$

$$N_{1,4}(t) = c_{1,0} + c_{1,1} t + c_{1,2} t^2 + c_{1,3} t^3 \quad (2.20)$$

$$N_{2,4}(t) = c_{2,0} + c_{2,1} t + c_{2,2} t^2 + c_{2,3} t^3 \quad (2.21)$$

$$N_{3,4}(t) = c_{3,0} + c_{3,1} t + c_{3,2} t^2 + c_{3,3} t^3 \quad (2.22)$$

As condições de continuidade  $C^0$ ,  $C^1$  e  $C^2$  traduzem-se, respectivamente, em:

- *condição de continuidade da função:*  $\mathbf{R}_j(1) = \mathbf{R}_{j+1}(0)$ ;
- *condição de continuidade da primeira derivada da função:*  $\dot{\mathbf{R}}_j(1) = \dot{\mathbf{R}}_{j+1}(0)$ ;
- *condição de continuidade da segunda derivada da função:*  $\ddot{\mathbf{R}}_j(1) = \ddot{\mathbf{R}}_{j+1}(0)$ .

Impondo-se as condições de continuidade à expressão (2.14) entre um troço  $j$  e um troço  $j+1$  vai-se poder determinar os coeficientes  $c_{i,k}$  dos polinómios da base que as satisfazem. Chega-se a (Ko et al., 2003):

- $\mathbf{R}_j(1) = \mathbf{R}_{j+1}(0)$ :

$$N_{0,4}(1) = 0 \quad (2.23)$$

$$N_{1,4}(1) = N_{0,4}(0) \quad (2.24)$$

$$N_{2,4}(1) = N_{1,4}(0) \quad (2.25)$$

$$N_{3,4}(1) = N_{2,4}(0) \quad (2.26)$$

$$N_{3,4}(0) = 0 \quad (2.27)$$

- $\dot{\mathbf{R}}_j(1) = \dot{\mathbf{R}}_{j+1}(0)$ :

$$\dot{N}_{0,4}(1) = 0 \quad (2.28)$$

$$\dot{N}_{1,4}(1) = \dot{N}_{0,4}(0) \quad (2.29)$$

$$\dot{N}_{2,4}(1) = \dot{N}_{1,4}(0) \quad (2.30)$$

$$\dot{N}_{3,4}(1) = \dot{N}_{2,4}(0) \quad (2.31)$$

$$\dot{N}_{3,4}(0) = 0 \quad (2.32)$$

- $\ddot{\mathbf{R}}_j(1) = \ddot{\mathbf{R}}_{j+1}(0)$ :

$$\ddot{N}_{0,4}(1) = 0 \quad (2.33)$$

$$\ddot{N}_{1,4}(1) = \ddot{N}_{0,4}(0) \quad (2.34)$$

$$\ddot{N}_{2,4}(1) = \ddot{N}_{1,4}(0) \quad (2.35)$$

$$\ddot{N}_{3,4}(1) = \ddot{N}_{2,4}(0) \quad (2.36)$$

$$\ddot{N}_{3,4}(0) = 0 \quad (2.37)$$

de onde resultam 15 equações. Será imposta uma equação adicional que, tal como para as curvas de Bézier, vai obrigar a que cada um dos polinómios da base seja a partição da unidade. Assim, se os quatro vértices coincidirem, a curva reduzir-se-á a um ponto coicidente com os vértices (Ko et al., 2003).

$$\sum_{i=0}^3 N_{i,4}(t) = 1 \quad (2.38)$$

Resolvendo o sistema de 16 equações e 16 incógnitas, calculam-se os valores de cada um dos coeficientes  $c_{i,k}$ , obtendo-se, para cada um dos polinómios da base:

$$\begin{aligned} N_{0,4}(t) &= \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{2}\right)t + \frac{1}{2}t^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)t^3 \\ N_{1,4}(t) &= \frac{2}{3} + 0t + (-1)t^2 + \frac{1}{2}t^3 \\ N_{2,4}(t) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)t^3 \\ N_{3,4}(t) &= 0 + 0t + 0t^2 + \frac{1}{6}t^3 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Tem-se, assim, formada a base de polinómios que respeita as três condições de continuidade impostas. Falta apenas definir os vértices para se ter o spline completamente definido, como se pode ver na equação (2.14). Como foi dito, para  $M$  pontos a interpolar ter-se-á  $M + 2$  vértices, de onde resultam  $M + 2$  incógnitas. Sabe-se que o spline terá de passar pelos  $M$  pontos a interpolar pelo que, desta condição, se retiram  $M$  equações. Sabendo que existem  $M$  pontos a interpolar e  $N$  troços, sendo que  $N = M - 1$ , pode-se, para cada ponto a

interpolar  $\mathbf{P}_j$ , dizer que:

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{R}_j(0) = \mathbf{V}_j N_{0,4}(0) + \mathbf{V}_{j+1} N_{1,4}(0) + \mathbf{V}_{j+2} N_{2,4}(0) + \mathbf{V}_{j+3} N_{3,4}(0) \quad (2.40)$$

$$\mathbf{P}_{j+1} = \mathbf{R}_j(1) = \mathbf{V}_j N_{0,4}(1) + \mathbf{V}_{j+1} N_{1,4}(1) + \mathbf{V}_{j+2} N_{2,4}(1) + \mathbf{V}_{j+3} N_{3,4}(1) \quad (2.41)$$

em que  $0 \leq j \leq M - 1$ .

Como foi definida a condição  $\mathbf{R}_j(1) = \mathbf{R}_{j+1}(0)$ ,  $M - 2$  equações (metade das referentes aos pontos que não são extremos) são supérfluas uma vez que se repetem em (2.40) e (2.41), sobrando  $M$  equações.

Faltam duas equações para se poder resolver o sistema e calcular todas as incógnitas. Estas duas equações resultarão da imposição de duas condições de fronteira. Neste caso, serão utilizados dois tipos distintos de splines: uns com condições de fronteira naturais, isto é, será imposta curvatura nula nas extremidades e os outros com condições de fronteira periódicas, isto é, o último ponto coincidirá com o primeiro, pelo que tanto a curvatura como o declive terá de ser igual nestes pontos. Estas condições de fronteira são definidas da seguinte forma (Ko et al., 2003):

- *condições de fronteira naturais:*  $\ddot{\mathbf{R}}_0(0) = 0$  e  $\ddot{\mathbf{R}}_N(1) = 0$ ;
- *condições de fronteira periódicas:*  $\mathbf{R}_0(0) = \mathbf{R}_N(1)^1$ ,  $\dot{\mathbf{R}}_0(0) = \dot{\mathbf{R}}_N(1)$  e  $\ddot{\mathbf{R}}_0(0) = \ddot{\mathbf{R}}_N(1)$ .

## 2.3 Desenho do rotor

### 2.3.1 Desenho do cubo e da caixa exterior

A primeira parte do rotor da turbina a desenhar serão as superfícies do cubo e da caixa exterior do rotor, definindo-se, assim, todas as dimensões exteriores do rotor.

Uma vez que se tratam de superfícies de revolução (ver definição da turbina biradial na secção 2.1), são definidas por geratrizes. Estas, por sua vez, serão definidas em coordenadas cilíndricas  $r$ ,  $z$  e  $\theta$  no plano  $rz$ , a  $\theta$  constante e em que a origem do referencial coincidirá com o centro do rotor e o eixo  $zz$  coincidirá com o eixo de rotação deste. Como tal, cada ponto de cada uma das geratrizes será definido pela coordenada  $r$  e pela coordenada  $z$ .

Numa primeira aproximação vão ser posicionados 10 pontos de controlo para serem traçadas duas curvas de Bézier que definirão as geratrizes das superfícies do cubo e da caixa exterior, sendo que 5 desses pontos definem o cubo e os outros 5 definem a caixa exterior. Sobre os pontos resultantes da curva de Bézier

<sup>1</sup>Esta condição é supérflua uma vez que é consequência de (2.40) e (2.41).

será traçado um spline para que haja controlo do espaçamento entre os pontos de discretização das curvas. (ver Figura 2.4)

As dimensões da turbina serão adimensionalizadas com o raio exterior desta por forma a permitir uma posterior análise de resultados mais eficaz. Esta adimensionalização também permite, como se verá mais adiante, reduzir em 1 grau de liberdade a geração da geometria, reduzindo-se, assim, numa unidade o número de parâmetros susceptíveis de optimização.

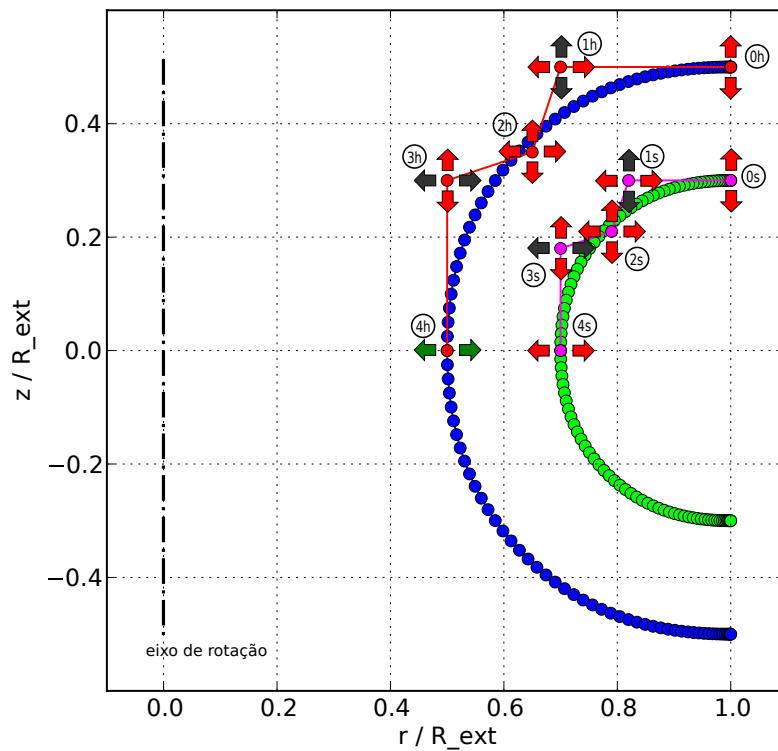


Figura 2.4: Representação da construção das geratrizes do cubo (h) e da caixa exterior (s)

Na Figura 2.4 está representado o posicionamento dos pontos de controlo das curvas e os correspondentes graus de liberdade atribuídos. Cada par de setas vermelhas (e o par de setas verdes) representa um grau de liberdade efectivo, que corresponde a um grau de liberdade da geometria que resulta do grau de liberdade do ponto de controlo. Cada par de setas pretas representa um grau de liberdade por acoplamento a outro, que corresponde a um grau de liberdade da geometria mas não do ponto de controlo isolado.

O posicionamento dos pontos foi feito tendo em conta as características das curvas de Bézier apresentadas na secção 2.2.1 e indo ao encontro da definição da turbina biradial apresentada na secção 2.1. Assim, seguem-se as condições que

daí resultam:

- *simetria em relação ao plano médio:*
  - a curva de Bézier só definirá metade da geratriz. A segunda metade será definida por condição de simetria imposta aos pontos resultantes da primeira metade. Recorrendo à propriedade de simetria das curvas de Bézier também seria possível definir uma curva simétrica posicionando os pontos de controlo simétricos. Contudo, a propriedade das condições geométricas dos extremos das curvas de Bézier impõe que estas passem no primeiro e no último pontos de controlo pelo que, optar por definir apenas metade da geratriz, permite ter controlo absoluto no posicionamento do seu ponto médio, que coincidirá com o ponto de coordenada  $r$  menor, uma vez que a sua posição será exactamente a do quinto ponto de controlo (4h ou 4s) e não dependerá, portanto, da posição dos restantes pontos de controlo;
  - recorrendo à propriedade de tangência das curvas de Bézier, os dois últimos pontos de controlo de cada uma das curvas terão a mesma coordenada  $r$  para que haja continuidade na primeira derivada do ponto médio quando for imposta a condição de simetria que gera a segunda metade da curva;
- *entrada e saída radiais:*
  - recorrendo à propriedade de tangência das curvas de Bézier, os dois primeiros pontos de controlo de cada uma das curvas terão a mesma coordenada  $z$ .

Estas condições retiram-nos 4 graus de liberdade em cada curva resultando, assim, em 6 graus de liberdade para a geração do cubo e outros 6 graus de liberdade para a geração da caixa exterior, cada um representado por um par de setas vermelhas ou verdes na Figura 2.4.

Uma vez que a forma do canal tenderá a aproximar-se de um semi-círculo, optou-se por definir, para uma melhor percepção geométrica do desenho, um parâmetro adicional,  $\rho = 1 - \frac{R_{int}}{R_{ext}}$ , em que  $R_{int}$  é o raio interior da turbina (que, adimensionalizado, define a coordenada  $r$  do ponto 4h) e  $R_{ext}$  é o raio exterior da turbina (que, adimensionalizado, vai ser sempre igual a 1), e definir as coordenadas dos pontos de controlo em função deste parâmetro.

Foi calculado um spline a partir dos pontos resultantes com o objectivo de os redistribuir. A redistribuição foi feita de acordo com uma função do tipo cosseno para permitir, a partir de cada linha média que, como se verá na secção 2.3.2, terá a mesma distribuição de pontos que a correspondente geratriz, uma adequada distribuição da espessura ao longo da pá, como será descrito na secção 2.3.2.

### 2.3.2 Desenho da pá

No presente trabalho, a pá do rotor será definida por interpolação linear entre duas secções. Contudo, o código foi elaborado por forma a permitir que facilmente se acrescentem outras secções para uma interpolação de grau superior. Uma das secções intersectará o cubo e a outra intersectará a caixa exterior. Todas as representações gráficas que se fazem ao longo desta secção são relativas à secção que intersecta o cubo.

Cada uma das duas secções será definida recorrendo a uma metodologia do tipo NACA em que se define, primeiro, a linha média da secção e, em seguida, uma função de distribuição de espessura (Abbot and Doenhoff, 1959). A secção 2.3.2 vai-se centrar na definição da linha média e a distribuição de espessura será abordada com detalhe na secção 2.3.2.

#### Desenho da secção média da pá

As linhas médias da pá serão definidas parametricamente devido às vantagens que esta representação apresenta e que foram descritas na secção 2.2. O parâmetro escolhido foi o comprimento adimensionalizado da geratriz de cada uma das superfícies a que pertence cada uma das linhas médias. Assim, cada uma das linhas médias será definida pelas coordenadas  $r(s)$ ,  $z(s)$  e  $\theta(s)$ , com  $0 \leq s \leq 1$ . As coordenadas  $r(s)$  e  $z(s)$  já se encontram definidas, uma vez que são estas que definem as curvas das geratrizes. Será, portanto, apenas necessário definir  $\theta(s)$ .

Como já referido na secção 2.1, a turbina será simétrica em relação ao plano perpendicular ao seu eixo e que o intersecta no ponto médio. Como tal, as funções que definem as coordenadas das linhas médias serão simétricas em  $s = 0,5$ . Isto já acontece com  $r(s)$  e  $z(s)$ , uma vez que, como descrito na secção 2.3.1, lhes foi imposta a condição de simetria (como se pode ver na Figura 2.5 e na Figura 2.6). Tal terá de acontecer também com  $\theta(s)$ .

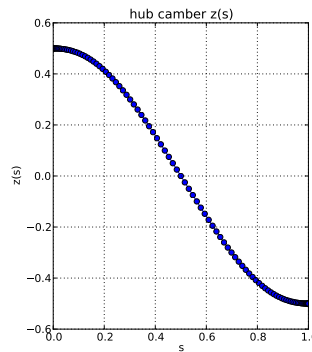
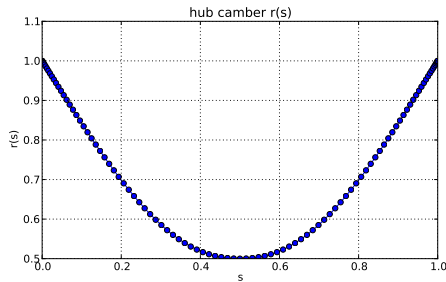


Figura 2.5:  $r(s)$  da linha média do cubo Figura 2.6:  $z(s)$  da linha média do cubo



Para definir  $\theta(s)$  recorreu-se, para cada uma das secções, a uma curva de Bézier, sobre a qual será, posteriormente, traçado um spline com o objectivo de obter uma distribuição dos pontos de acordo com o parâmetro  $s$  (não esquecer que  $s$  é um parâmetro discretizado). Na Figura 2.7 encontra-se representada a curva que define a coordenada  $\theta(s)$  para o cubo e os respectivos pontos de controlo utilizados para traçar a curva de Bézier. Mais uma vez, tal como na secção 2.3.1, a curva de Bézier foi utilizada para traçar apenas a primeira metade da curva tendo a segunda sido gerada por condição de simetria. Isto permite que haja um controlo absoluto de  $\theta(s = 0.5)$  já que, como explicado na secção 2.2.1, este ponto coincidirá com o ponto de controlo posicionado em  $s = 0.5$ . Para assegurar a continuidade da curva até à sua primeira derivada, recorreu-se novamente à propriedade de tangência das curvas de Bézier e garantiu-se que os dois últimos pontos de controlo que definem a curva têm a mesma coordenada  $\theta$ . No total, o número de pontos de controlo utilizado foi de 5. Como o que interessa na definição da linha média é a diferença entre o  $\theta$  de um ponto e um  $\theta_0$  de referência, optou-se por definir que o  $\theta_0$  de referência seria fixado em  $s = 0.5$  e que, por uma questão de simplicidade, este seria igual a zero,  $\theta(s = 0.5) = 0$ . Destas condições resultam, para cada uma das linhas médias que forem definidas, 6 graus de liberdade para a geometria que se traduzirão em 6 parâmetros a otimizar.

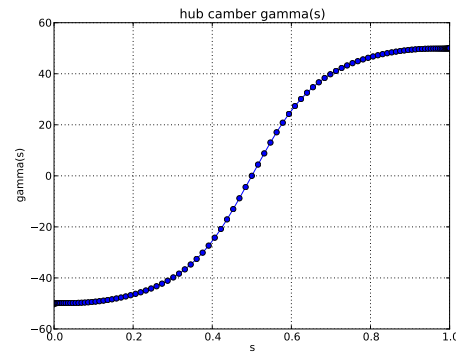
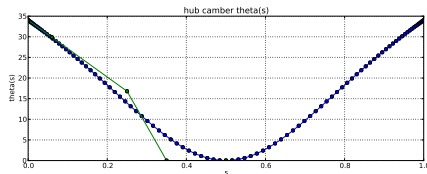


Figura 2.7:  $\theta(s)$  da linha média do cubo

Figura 2.8:  $\gamma'(s)$  da linha média do

Na Figura 2.9 está representada a linha média no cubo. O ângulo de entrada e de saída do escoamento relativamente à direcção radial,  $\gamma'$ , que, neste caso, uma vez que a turbina é simétrica, será o mesmo, é função da derivada de  $\theta(s)$  na entrada e na saída da turbina, respectivamente. Este pode ser calculado para qualquer ponto da linha média através da expressão (Falcão et al., 2013b):

$$\frac{d\theta(s)}{ds} = \frac{\tan(\gamma'(s))}{r(s)} \quad (2.42)$$

Assim, pode-se facilmente calcular  $\gamma'(s)$  que, como se verá no Capítulo 4 e no Capítulo 5, é um parâmetro de grande importância no desenho das pás do rotor (principalmente na entrada ( $s = 0$ ) e na saída ( $s = 1$ )). Este encontra-se representado na Figura 2.8.

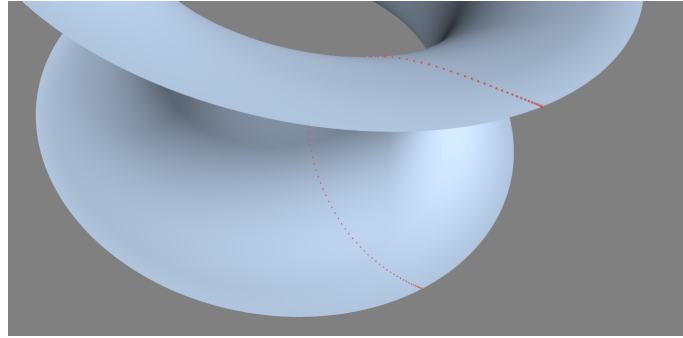


Figura 2.9: Representação tridimensional da linha média do cubo discretizada

### Distribuição de espessura ao longo de uma pá

Como já referido, a distribuição de espessura foi efectuada de acordo com uma metodologia do tipo NACA em que a espessura é distribuída na direcção normal à tangente da linha média. Contudo, como se está perante um problema tridimensional, existe uma infinidade de vectores normais a um primeiro. Só é possível, no espaço a 3 dimensões, definir uma direcção normal a um plano, ou seja, a dois vectores não colineares (que definem um plano).

Para cada secção, será necessário definir uma função de distribuição de espessura. Esta função tem como variável independente o parâmetro  $u$  que é o comprimento adimensionalizado de cada uma das linhas médias. De notar que  $u$  é diferente do  $s$  utilizado anteriormente que é o comprimento adimensionalizado de cada uma das geratrizes (ver Figura 2.10). À variável dependente deu-se o nome de  $thck(u)$  (de *thickness*) e é, para cada ponto, a distância ao ponto correspondente da linha média, o que equivale a metade da espessura da pá nessa secção. Para tal recorre-se, mais uma vez, a uma curva de Bézier para cada uma das secções, tal como se fez para a definição de  $\theta(s)$  na secção 2.3.2. Para garantir a continuidade da pá em  $u = 0$  e em  $u = 0.5$ , recorreu-se, de novo, à propriedade de tangência das curvas de Bézier e garantiu-se que os dois primeiros pontos têm a mesma coordenada  $u$  e que os dois últimos pontos têm a mesma coordenada  $thck(u)$ . Também como para o  $\theta(s)$  na secção 2.3.2, para haver um controlo absoluto da espessura no ponto médio da pá, em  $u = 0.5$ , a curva de Bézier apenas define metade da função de distribuição de espessura, sendo a restante definida por condição de simetria. Para definir a função de distribuição de espessura foram utilizados, no total, 6 pontos de controlo. Das condições enunciadas anteriormente resultam 7 graus de liberdade (que mais uma vez se traduzirão em 7 parâmetros a otimizar) por cada função de distribuição de es-

pessura que for definida.

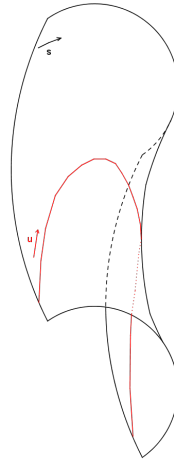


Figura 2.10: Representação do parâmetro  $s$  e do parâmetro  $u$

Por fim, traça-se um spline sobre a curva obtida para se redistribuir os pontos de acordo com o parâmetro  $u$  (que também é discretizado). A função de distribuição de espessura está representada na Figura 2.11.

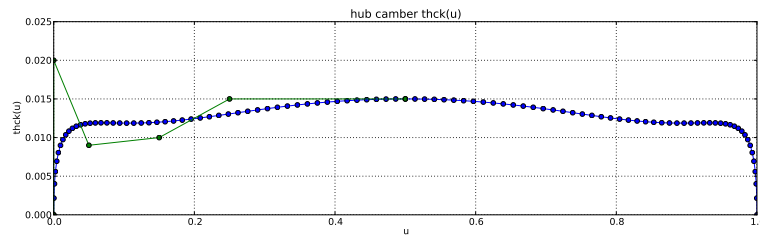


Figura 2.11: Representação da função de distribuição de espessura do cubo discretizada

O primeiro vector a definir será o mesmo que habitualmente é definido no espaço bidimensional: o vector tangente à linha média  $\xi$  (representado a vermelho na Figura 2.12). O segundo vector  $\xi'$  (representado a azul claro na Figura 2.12) será um vector tangente a uma linha que une os dois pontos das duas linhas que definem o plano médio da pá com o mesmo parâmetro  $u$ . Estes dois vectores definem um plano que é tangente ao plano médio da pá. Ao calcular o produto vectorial entre estes dois vectores obtém-se um terceiro vector  $\eta$  (representado a verde na Figura 2.12) perpendicular aos dois primeiros (normal, portanto, ao plano definido pelos dois primeiros vectores). É segundo a direcção definida por este vector que a espessura vai ser distribuída de acordo com a função de distribuição de espessura definida anteriormente. Todos estes vectores foram normalizados. Calculando o produto vectorial entre  $\xi$  (tangente à linha média da secção) e  $\eta$  (normal ao plano médio da pá) pode-se ainda obter um quarto vector  $\zeta$  (representado a azul escuro na Figura 2.12) que, juntamente com  $\xi$  e  $\eta$ , forma um referencial local ortonormado.

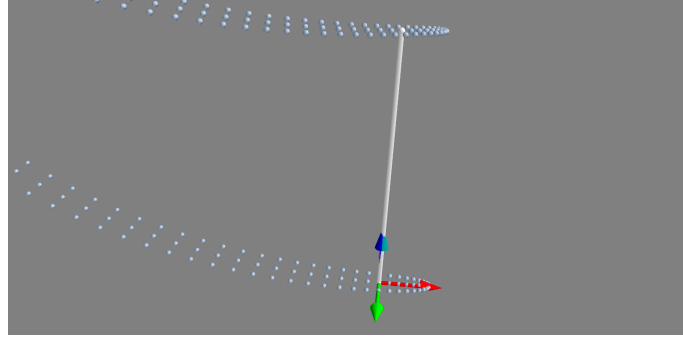


Figura 2.12: Representação do referencial local para distribuição de espessura

A cada ponto que define a linha média é adicionada, na direcção  $\eta$  do referencial local, espessura positiva, definindo o extradorso, e espessura negativa, definindo o intradorso.

#### Distribuição de pontos de cálculo ao longo de uma pá

Depois de definidas as pás, para melhorar a qualidade da malha que será gerada, é importante que se tenha cuidado com a distribuição que é dada aos pontos ao longo desta. Inicialmente, os pontos foram distribuídos segundo uma função do tipo cosseno que permite um espaçamento mais apertado nos bordos de ataque e de fuga. Contudo, esta distribuição não se revelou satisfatória uma vez que havia um excesso de concentração de pontos no bordo de ataque e no bordo de fuga. Como tal, recorreu-se a um algoritmo desenvolvido por Harry L. Morgan, Jr. que tem sido utilizado no IST para distribuir pontos ao longo de perfis e que os distribui em função da curvatura local do perfil. Contudo, este algoritmo foi desenvolvido para perfis 2D pelo que foi necessária a sua adaptação para 3D (Morgan).

Segundo Barbosa (2005), a curvatura de qualquer curva paramétrica  $\alpha(t)$ , pode ser dada por:

$$K(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \quad (2.43)$$

Neste caso, num espaço cartesiano de 3 dimensões, e recorrendo a curvas parametrizadas pelo comprimento  $s$ , estas podem ser definidas por  $\alpha(s) =$

$(x(s), y(s), z(s))$ , de onde resulta, substituindo em (2.43):

$$K(s) = \frac{\sqrt{(x' y'' - y' x'')^2 + (x' z'' - z' x'')^2 + (y' z'' - z' y'')^2}}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right)^3} \quad (2.44)$$

onde  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  e  $x''$ ,  $y''$  e  $z''$  são, respectivamente, as primeiras e segundas derivadas de  $x$ ,  $y$  e  $z$  em ordem ao parâmetro  $s$ .

O algoritmo baseia-se num método de distribuição de pontos em função da curvatura local. Quanto maior for a curvatura mais apertado vai ser o espaçamento entre pontos nessa zona. É necessário, portanto, que entre no algoritmo um conjunto de pontos que defina a pá *a priori*. O algoritmo apenas vai fazer uma redistribuição de pontos. Como tal é vantajoso que os pontos que entram no algoritmo sigam a distribuição tipo cosseno que havia sido definida uma vez que esta permite que os cálculos da curvatura se façam com maior precisão no intradorso e no extradorso, que coincidem com as zonas de maior curvatura. Por este motivo foram mantidas todas as distribuições de pontos que tinham sido efectuadas até este ponto. Para que não haja uma excessiva dispersão de pontos nos locais onde a curvatura é muito pequena, ou mesmo inexistente, é definido um valor de curvatura mínimo que é assumido sempre que o valor calculado for inferior a este. Com base na curvatura local, calculada através de (2.44), é calculado um novo parâmetro integral da curvatura:

$$k_i = k_{i-1} + \int_{s_{i-1}}^{s_i} |K(s)|^\gamma ds \quad (2.45)$$

em que  $k_0 = 0$  e  $\gamma$  é uma constante que pode ser definida para ajustar a distribuição de pontos. Neste trabalho foi adoptado um valor de  $\gamma = 2.5$ .

A redistribuição de pontos é efectuada dividindo o parâmetro integral  $k$  uniformemente pelo número de pontos escolhidos para o intradorso e para o extradorso e calculando as novas coordenadas  $x(k)$ ,  $y(k)$  e  $z(k)$ .

Este algoritmo tem também a grande vantagem de permitir a distribuição de um número diferente de pontos no intradorso e no extradorso do perfil. Para que se obtenha, *a posteriori*, uma malha com elementos o mais regulares possível definiu-se que a razão entre o número de elementos no extradorso e no intradorso seria proporcional à razão entre os seus comprimentos.

## 2.4 Intersecções

A distribuição de espessura foi efectuada segundo a direcção  $\eta$  que só em circunstâncias muito especiais coincidirá com a superfície a que pertence a linha

média. O mesmo acontecerá quando se fizer a expansão da malha na região da camada limite na secção 3.3.1. Como tal, será necessário calcular as intersecções da pá e da respectiva malha com a secção correspondente interpolada entre o cubo e a caixa exterior, a fim de se obter as coordenadas dos seus pontos nestas superfícies. Nesta secção será tratado apenas o caso das intersecções no cubo e na caixa exterior mas a metodologia para a restante malha que, como se verá, não será mais do que uma expansão da própria pá, é exactamente a mesma, pelo que bastará substituir as coordenadas da pá pelas coordenadas das sucessivas camadas da malha.

O cubo e a caixa exterior são definidos pelas coordenadas cilíndricas  $r(s)$  e  $z(s)$ , que são dadas em função do parâmetro  $s$ , o comprimento da curva geratriz de cada uma das superfícies. A coordenada  $\theta$  está livre, uma vez que se tratam de duas superfícies de revolução. Contudo, cada ponto pertencente a cada uma destas superfícies é necessariamente definido pelas três coordenadas  $r(s)$ ,  $\theta$  e  $z(s)$ . Estas podem ser convertidas nas coordenadas cartesianas  $X(s, \theta)$ ,  $Y(s, \theta)$  e  $Z(s)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X(s, \theta) &= r(s) \cos(\theta) \\ Y(s, \theta) &= r(s) \sin(\theta) \\ Z(s) &= z(s) \end{aligned} \tag{2.46}$$

As coordenadas de cada ponto da pá e da camada limite são definidas por  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Estes vão ser divididos em pares correspondentes, em que as coordenadas  $x_1$ ,  $y_1$  e  $z_1$  correspondem ao ponto mais afastado da superfície a intersectar e as coordenadas  $x_2$ ,  $y_2$  e  $z_2$  correspondem ao ponto mais próximo da superfície a intersectar (ver Figura 2.13). A recta definida pelo par de pontos correspondentes define-se parametricamente por:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y(t) &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z(t) &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned} \tag{2.47}$$

O cálculo das intersecções não é mais do que a resolução do sistema que de seguida se apresenta:

$$\begin{cases} x(t) = X(s, \theta) \\ y(t) = Y(s, \theta) \\ z(t) = Z(s) \end{cases} \tag{2.48}$$

Substituindo (2.47) e (2.46) em (2.48), resulta:

$$\begin{cases} x_1 + t(x_2 - x_1) = r(s) \cos(\theta) \\ y_1 + t(y_2 - y_1) = r(s) \sin(\theta) \\ z_1 + t(z_2 - z_1) = z(s) \end{cases} \quad (2.49)$$

Trata-se de um sistema não linear de 3 equações e 3 incógnitas,  $t$ ,  $s$  e  $\theta$ , que pode ser resolvido recorrendo a um método iterativo, como o método de Newton, que foi o escolhido para este caso.

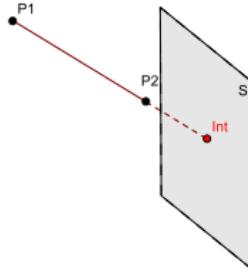


Figura 2.13: Intersecções

### 2.4.1 Método de Newton

Considere-se o seguinte sistema de  $n$  equações e  $n$  incógnitas:

$$\begin{cases} f_1(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0 \\ f_2(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

Tome-se  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  como um vector  $\mathbf{v}$  e  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  como um vector de funções  $\mathbf{f}$ . Com esta notação, pode-se reescrever o sistema (2.50) na seguinte forma simplificada:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = 0 \quad (2.51)$$

em que a incógnita é o vector  $\mathbf{v}$ . Tem-se, portanto, que encontrar um vector  $\mathbf{v}$  tal

que anule o vector de funções  $\mathbf{f}$ .

O método de Newton foi desenvolvido considerando uma aproximação linear a um ponto  $\mathbf{v}$ , partindo de um ponto inicial  $\mathbf{v}_i$ . Esta aproximação repeta-se a cada iteração e resulta, para cada iteração, num sistema linear expresso na forma simplificada por:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{v}_i) + \mathbf{D}_f(\mathbf{v}_i) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \quad (2.52)$$

de onde, para cada iteração, se vai procurar a solução  $\mathbf{v}$  para a seguinte equação:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}_i) + \mathbf{D}_f(\mathbf{v}_i) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \quad (2.53)$$

Substituindo (2.53) em (2.51), vem:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}_i) + \mathbf{D}_f(\mathbf{v}_i) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) = 0 \quad (2.54)$$

em que  $\mathbf{v}_i$  é o vector incógnita no início de cada iteração e  $\mathbf{v}$  é o vector incógnita obtido no final de cada iteração.  $\mathbf{D}_f$  é a matriz das derivadas parciais das componentes de  $\mathbf{f}$  em ordem a cada um dos elementos do vector  $\mathbf{v}$ .

$$\mathbf{D}_f(\mathbf{v}_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1}(\mathbf{v}_i) & \frac{\partial f_1}{\partial v_2}(\mathbf{v}_i) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial v_n}(\mathbf{v}_i) \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_1}(\mathbf{v}_i) & \frac{\partial f_2}{\partial v_2}(\mathbf{v}_i) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial v_n}(\mathbf{v}_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial v_1}(\mathbf{v}_i) & \frac{\partial f_m}{\partial v_2}(\mathbf{v}_i) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial v_n}(\mathbf{v}_i) \end{bmatrix}$$

Definindo:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_i \quad (2.55)$$

pode-se reescrever (2.54) como:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}_i) + \mathbf{D}_f(\mathbf{v}_i) \cdot \Delta \mathbf{v} = 0 \quad (2.56)$$

que é uma equação matricial cuja incógnita é  $\Delta \mathbf{v}$ .

Desenvolvendo (2.56):



$$\mathbf{D}_f(\mathbf{v}_i) \cdot \Delta \mathbf{v} = -\mathbf{f}(\mathbf{v}_i) \quad (2.57)$$

$$\mathbf{D}_f(\mathbf{v}_i)^{-1} \cdot \mathbf{D}_f(\mathbf{v}_i) \cdot \Delta \mathbf{v} = \mathbf{D}_f(\mathbf{v}_i)^{-1} \cdot (-\mathbf{f}(\mathbf{v}_i)) \quad (2.58)$$

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{D}_f(\mathbf{v}_i)^{-1} \cdot (-\mathbf{f}(\mathbf{v}_i)) \quad (2.59)$$

obtém-se uma equação em ordem à incógnita  $\Delta \mathbf{v}$ .

O vector  $\mathbf{v}$  é calculado recorrendo à definição de  $\Delta \mathbf{v}$  em (2.55):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + \Delta \mathbf{v} \quad (2.60)$$

O vector  $\mathbf{v}$  obtido será o vector  $\mathbf{v}_i$  da próxima iteração e assim sucessivamente, até que se obtenha um resíduo de acordo com o pretendido. Este pode, por sua vez, ser dado pela norma do vector  $\Delta \mathbf{v}$ ,  $\|\Delta \mathbf{v}\|$ , obtido em cada iteração (Ohio, 2008).

### 2.4.2 Método da Bissecção

O método da bissecção é um método numérico muito útil na localização de raízes de uma função em que, basicamente, se procura um intervalo do domínio da função cada vez mais curto, de iteração em iteração, e que contém a raiz.

Este método baseia-se em dois teoremas fundamentais e extremamente simples. O primeiro é o *Teorema do Valor Intermédio* que diz que se num intervalo  $[a,b]$  do domínio de uma função  $f(a)f(b) \leq 0$  então a função tem pelo menos um zero nesse intervalo (por outras palavras, existe pelo menos uma raiz da equação  $f(x) = 0$  no intervalo  $[a,b]$ ). O segundo é o *Teorema de Rolle* que diz que, considerando um intervalo  $[a,b]$  do domínio de uma função  $f$  diferenciável e  $f'(x) \neq 0$  nesse intervalo então essa função tem no máximo um zero nesse intervalo (por outras palavras existe no máximo uma raiz da equação  $f(x) = 0$  no intervalo  $[a,b]$ ). Se se conjugar as duas condições, conclui-se que se ambas se verificarem num intervalo  $[a,b]$  então existe exactamente uma raiz da equação  $f(x) = 0$  no intervalo  $[a,b]$  (Alves, 1996).

Consegue-se, com base no enunciado anteriormente, saber se num dado intervalo existe a raiz de uma equação. Será, portanto, possível ir determinando um intervalo cada vez mais apertado e saber se nele está contida a raiz de uma equação até que esse intervalo seja inferior ao erro que se pretende para a solução. É exactamente isto que faz o método da bissecção.

Partindo-se de um intervalo  $[a,b]$  onde se sabe, pela aplicação dos teoremas

enunciados, que existe uma e uma só raiz da equação  $f(x) = 0$ , vai-se partindo, a cada iteração, esse intervalo em dois intervalos iguais e averiguar qual deles contém a raiz. Para tal localiza-se o ponto médio do intervalo  $p = \frac{a+b}{2}$  e calcula-se  $k = f(a)f(p)$ . Se  $k \leq 0$  então sabe-se que a raiz está contida no intervalo  $[a,p]$  e recomeça-se uma nova iteração com  $b = p$ , se  $k \geq 0$  então sabe-se que a raiz está contida no intervalo  $[p,b]$  e recomeça-se uma nova iteração com  $a = p$  e se  $k = 0$  então sabe-se que a raiz é exactamente  $p$ . O erro máximo é dado, para cada iteração pelo intervalo considerado (Alves, 1996).

### 2.4.3 Implementação do Método de Newton conjugado com o Método da Bisseccção

Para resolver o sistema de equações obtido em (2.49) vai-se fazer uso da conjugação do método de Newton, analisado na secção 2.4.1, para resolver sistemas de equações não lineares, com o método da Bisseccção, analisado na secção 2.4.2, para arbitrar os valores iniciais para o arranque do processo iterativo.

Pode-se, então, de acordo com o método de Newton enunciado, transformar o sistema de equações (2.49) em:

$$\begin{cases} x_1 + t(x_2 - x_1) - r(s) \cos(\theta) &= 0 \\ y_1 + t(y_2 - y_1) - r(s) \sin(\theta) &= 0 \\ z_1 + t(z_2 - z_1) - z(s) &= 0 \end{cases}$$

O vector  $\mathbf{v}$  vai ser dado por:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ \theta \end{bmatrix}$$

Posto isto, está-se em condições de retirar o vector  $\mathbf{f}$ :

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_1 + t(x_2 - x_1) - r(s) \cos(\theta) \\ y_1 + t(y_2 - y_1) - r(s) \sin(\theta) \\ z_1 + t(z_2 - z_1) - z(s) \end{bmatrix}$$

e a matriz  $\mathbf{D}_f$ :

$$\mathbf{D}_f = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & -r(s)' \cos(\theta) & r(s) \sin(\theta) \\ (y_2 - y_1) & -r(s)' \sin(\theta) & -r(s)' \cos(\theta) \\ (z_2 - z_1) & -z(s)' & 0 \end{bmatrix}$$

Partindo de um vector  $\mathbf{v}_i$  inicial, está-se em condições de arrancar o processo iterativo em que  $\Delta \mathbf{v}$  vai sucessivamente sendo calculado pela expressão:

$$\begin{bmatrix} \Delta t \\ \Delta s \\ \Delta \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & -r(s)' \cos(\theta) & r(s) \sin(\theta) \\ (y_2 - y_1) & -r(s)' \sin(\theta) & -r(s)' \cos(\theta) \\ (z_2 - z_1) & -z(s)' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x_1 - t(x_2 - x_1) + r(s) \cos(\theta) \\ -y_1 - t(y_2 - y_1) + r(s) \sin(\theta) \\ -z_1 - t(z_2 - z_1) + z(s) \end{bmatrix}$$

e  $\mathbf{v}$  pela expressão:

$$\begin{bmatrix} t \\ s \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_i \\ s_i \\ \theta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t \\ \Delta s \\ \Delta \theta \end{bmatrix}$$

O vector  $\mathbf{v}_i$  da primeira iteração vai ser determinado assumindo considerações físicas aceitáveis (Ohio, 2008).

Para tal, vai-se considerar cada uma das variáveis separadamente. Tendo em conta que se parte de dois pontos em que um deles, o 2, estará, à partida, já muito próximo do ponto de interseção, parece aceitável tomá-lo como uma referência para vector  $\mathbf{v}_i$  inicial. Serão tomados, portanto, para o  $t_i$  e para o  $\theta_i$  iniciais, os valores de 1 e do arco de tangente entre a coordenada  $y_2$  e a coordenada  $x_2$ , respectivamente. Este último arco de tangente não é mais do que o  $\theta$  em coordenadas cilíndricas do ponto 2.

Uma vez que a variável  $s$  não está relacionada com os pontos da pá e da camada limite mas é antes um parâmetro das coordenadas que definem o cubo e a caixa exterior, a determinação do  $s_i$  inicial torna-se mais complicada. Uma solução possível e que será a adoptada consiste em, tomando mais uma vez o ponto 2 como referência, procurar um  $s$  para o qual  $z(s)$  esteja perto de  $z_2$ .

Isto será feito recorrendo ao método da bissecção apresentado na secção 2.4.2, considerando a coordenada  $z(s)$  das superfícies do cubo e da caixa exterior e a coordenada  $z_2$  da recta a intersectar. Uma vez que  $s$  é um parâmetro discreto, vai-se procurar os dois valores deste parâmetro para os quais, entre as respectivas coordenadas  $z(s)$ , se localiza o valor  $z_2$ . O intervalo  $[a,b]$  inicial será, então, dado pela dimensão do vector que contém o parâmetro  $s$ . O critério de paragem será a dimensão do intervalo ser de 1, o que indica que restam dois valores se-

guiados do parâmetro  $s$ .

Para as seguintes iterações, o valor do vector  $\mathbf{v}_i$  toma o valor do vector  $\mathbf{v}$  calculado no final da iteração anterior.

As duas rotinas em Python que permitem efectuar o procedimento descrito encontram-se no Apêndice .5 na secção .6, o método de Newton, e na secção .7, o método da bissecção.

## 2.5 Parâmetros que definem a geometria

Para concluir este Capítulo relativo à geração da geometria, apresentam-se, em forma de síntese, os parâmetros que definem toda a geometria do rotor:

- 6 parâmetros que definem o cubo;
- 6 parâmetros que definem a caixa exterior;
- número de secções que definem a pá;
- 6 parâmetros por cada secção que define a pá que definem a coordenada *theta* da respectiva linha média;
- 7 parâmetros por cada secção que define a pá que definem a distribuição de espessura *thick* da respectiva secção;
- número de pás.

A geometria do rotor é, assim, completamente definida, no caso em que as pás são geradas por interpolação linear (2 secções), por 38 parâmetros (mais o número de pás, considerado como um parâmetro secundário).

Na Figura 2.14 está representada uma geometria do rotor da turbina biradial obtida através do método descrito ao longo deste capítulo.

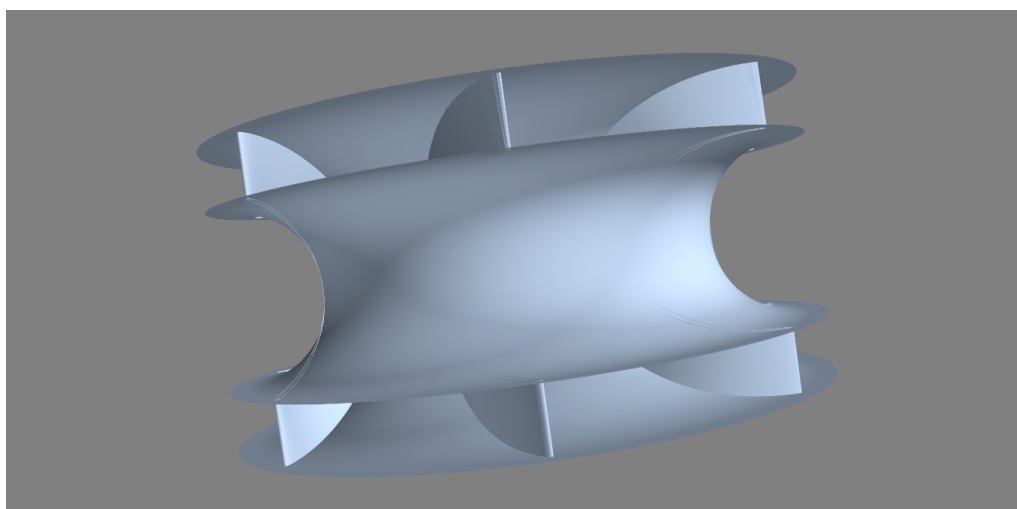


Figura 2.14: Geometria do rotor da turbina biradial



## Capítulo 3

# Geração da malha

### 3.1 Introdução

A utilização de métodos numéricos na resolução de equações diferenciais exige que o domínio de cálculo seja discretizado. Os métodos numéricos mais utilizados (diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos) exigem que essa discretização se faça por pequenos volumes de controlo, ao conjunto dos quais se dá o nome de malha. A geração de uma malha de cálculo constitui, só por si, uma área de engenharia e um campo de investigação quase autónomo, mas transversal a inúmeras aplicações de engenharia em geral e de fundamental importância em Mecânica dos Fluidos Computacional em particular (Anderson, 1995). Ao longo deste capítulo serão apenas apresentados alguns conceitos básicos acerca da geração de malhas, sendo que se dará mais enfoque à forma como foi gerada a malha para este caso em particular. Será necessário, a partir da geometria gerada no capítulo 2, gerar uma malha de cálculo apropriada para o efeito que se pretende, isto é, uma malha que seja gerada de forma automática, que se adapte à geometria gerada e que seja construída em função de parâmetros que permitam ter flexibilidade e adaptar a malha aos requisitos dos cálculos efectuados. Alguns trabalhos têm sido desenvolvidos neste âmbito, nomeadamente por Y. Kallinderis (Khawaja et al., 2000; Kallinderis and Kavouklis, 2005). A malha gerada foi inspirada no trabalho de Gomes et al. (2012a). Escolheu-se, tal como no trabalho referido, fazer uso de uma malha híbrida tridimensional composta por prismas, pirâmides, tetraedros e hexaedros.

### 3.2 Malhas de cálculo

Para resolver numericamente o sistema de equações diferenciais que descreve um processo físico que tem lugar num determinado domínio finito é necessário, antes de mais, discretizar as superfícies envolventes que formam a fronteira do domínio, assim como o volume contido no seu interior. Neste caso recorreu-se a uma discretização em pequenos volumes de controlo que, como já mencionado, é utilizada em vários métodos numéricos, nomeadamente nos três mais utilizados: diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos. Neste traba-

lho será utilizado o método dos volumes finitos (MVF). A malha é composta por dois componentes fundamentais: os pontos e as células. Há essencialmente duas formas de gerar uma malha. Numa das formas, a utilizada neste trabalho, distribuem-se os pontos que vão corresponder aos vértices das células (*cell centered scheme*) e na outra forma distribuem-se os pontos que vão corresponder aos centróides das células (*cell vertex scheme*), como representado na Figura 3.1 e na Figura 3.2. Cada volume é definido por um centróide, pelas faces que o envolvem e pelos vértices dos elementos, designados de nós. Uma descrição mais detalhada do MVF será efectuada na secção 4.2.5. O método de cálculo escolhido é de fundamental importância na escolha da forma como a malha é gerada, uma vez que este a pode condicionar fortemente. É o caso, por exemplo, do método das diferenças finitas que obriga a que no espaço computacional (coordenadas utilizadas na resolução do sistema de equações) os pontos de cálculo tenham distâncias uniformes entre si (para um aprofundamento deste tema sugere-se a consulta de (Anderson, 1995)). Contudo, convém salientar que o MVF não exige a transformação de malha do espaço físico para o espaço computacional o que é, desde logo, uma vantagem que permite maior liberdade na geração da malha (Anderson, 1995; Blazek, 2005).

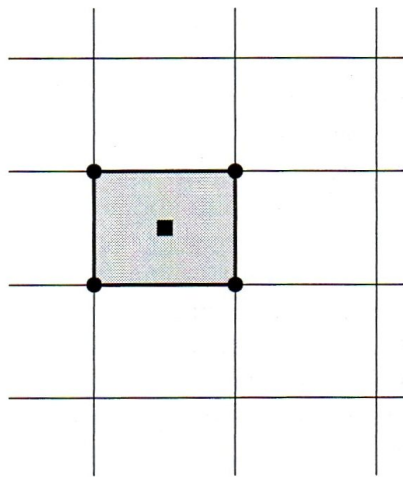


Figura 3.1: Esquema *cell centered* (Blazek, 2005)

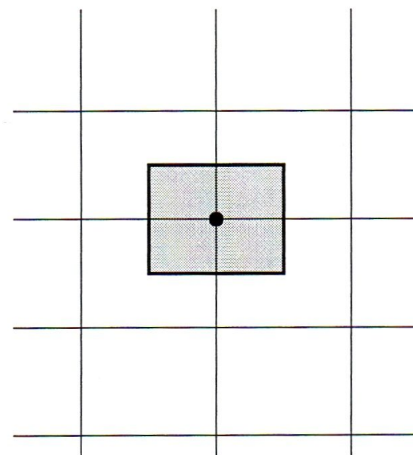


Figura 3.2: Esquema *cell vertex* (Blazek, 2005)

Existem duas grandes famílias de malhas, as malhas estruturadas e as malhas não estruturadas, e uma terceira, as malhas híbridas, que é a combinação das outras duas. As suas características serão descritas de forma sucinta pelo que, para um aprofundamento acerca desta matéria, aconselha-se a consulta da literatura disponível, (Anderson, 1995) ou (Blazek, 2005) por exemplo. A principal regra a ter em conta quando se gera uma malha é que deve haver uma maior concentração de pontos de cálculo onde os gradientes são maiores. Assim, por exemplo, nas regiões das camadas limite, onde há sempre um grande gradiente de velocidades, deve haver uma grande concentração de pontos. Se tal não for feito, perder-se-ão os fenómenos físicos locais e a solução será irrealista, como



se pode ver pela comparação entre a Figura 3.3 e a Figura 3.4.

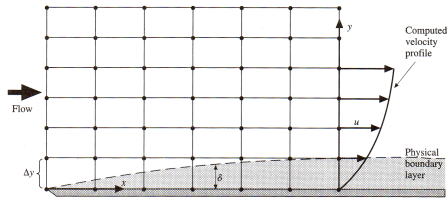


Figura 3.3: Malha com crescimento uniforme (Anderson, 1995)

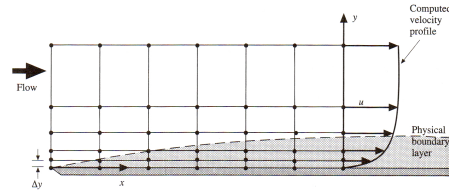


Figura 3.4: Malha com crescimento não uniforme (Anderson, 1995)

É importante que alguns parâmetros da malha obedeam aos pressupostos de que partem os modelos numéricos do escoamento utilizados. Estes modelos serão abordados no Capítulo 4 mas é desde já necessário saber que um desses parâmetros de maior importância é o  $y^+$  junto às paredes que envolvem o escoamento. Embora este não seja um parâmetro puramente geométrico, é a geometria da malha que o define. É dado pela expressão:

$$y^+ = \frac{\rho v_\tau y}{\mu} = \frac{v_\tau y}{\nu} \quad (3.1)$$

onde  $v_\tau$  é a velocidade de fricção que é definida por:

$$v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.2)$$

em que  $\tau_w$  é a tensão de corte na parede.

Para os modelos escolhidos, é requerido que  $y^+ \leq 1$  para o centróide da primeira célula junto à parede, sendo que  $y^+ \leq 5$  também é aceitável, como se verá no Capítulo 4.

### 3.2.1 Malhas estruturadas

Uma malha estruturada é uma malha em que cada ponto da malha (que poderá ser transformado num centróide ou num vértice de um elemento da malha) é obtido pela intersecção de apenas duas linhas que, por sua vez, apenas se intersectam uma vez. Cada um dos pontos é definido de forma unívoca pelos três índices  $i, j, k$  (em 3D) e as correspondentes coordenadas cartesianas  $x_{i,j,k}$ ,  $y_{i,j,k}$  e  $z_{i,j,k}$ . Têm como principais vantagens o facto de serem mais fáceis de programar e de tornarem a resolução das equações diferenciais a elas associadas mais eficiente. Isto porque todos os atributos de cada ponto da malha podem ser armazenados como variáveis indexadas (numa matriz) e porque permite facilmente saber quais os pontos vizinhos. Como desvantagens têm o facto de não permitirem

a modelação de geometrias muito complexas e a dificuldade que apresentam em controlar a distribuição de pontos (por exemplo, a concentração de pontos em zonas específicas); assim, por exemplo, quando existem superfícies côncavas ou convexas torna-se inevitável a existência de uma variação na concentração de pontos em função da distância a essas superfícies. Em 2D, as células das malhas são quadriláteros e em 3D são hexaedros (Blazek, 2005).

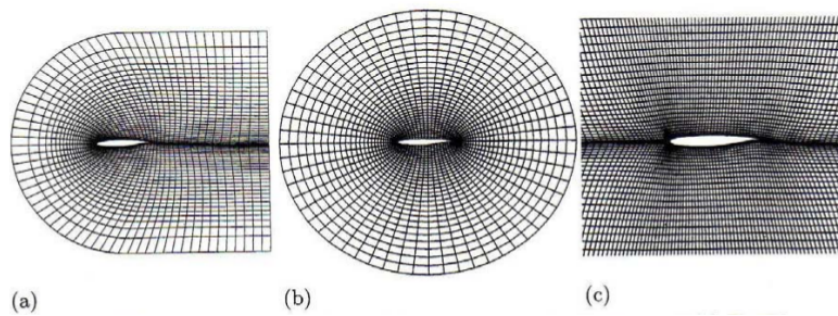


Figura 3.5: Malha do tipo C (a), do tipo O (b) e do tipo H (c) (Lermusiaux, 2011)

Dentro das malhas estruturadas distinguem-se três famílias, cujos nomes estão directamente relacionados com a sua forma: as malhas do tipo O, as malhas do tipo C e as malhas do tipo H (ver Figura 3.5) (Cebeci et al., 2005).

### 3.2.2 Malhas não estruturadas

Nas malhas não estruturadas tanto os pontos da malha como as suas células não têm nenhuma ordem definida, isto é, não se consegue saber quais as células ou os pontos vizinhos através do índice correspondente à célula ou ao ponto. Contudo, estas malhas apresentam uma enorme flexibilidade, o que as torna apropriadas para o tratamento de geometrias complexas. Têm também a vantagem de poderem ser geradas de forma automática, independentemente da complexidade do domínio, bastando definir os vértices dos contornos do mesmo e recorrendo à triangulação de Delaunay (Chung, 2002). Como desvantagens as malhas não estruturadas apresentam uma menor eficiência de cálculo e uma maior necessidade de capacidade de armazenamento, em parte por obrigarem o computador a “procurar” as células vizinhas. Estas malhas também apresentam normalmente dificuldades em resolver de forma aceitável as camadas limite. Geralmente as suas células são triângulos em 2D e tetraedros em 3D (Blazek, 2005).

### 3.2.3 Malhas híbridas

As malhas híbridas, que serão utilizadas neste caso, conjugam malhas estruturadas com malhas não estruturadas. Estas permitem resolver alguns problemas subjacentes às malhas não estruturadas, nomeadamente no que toca à solução das camadas limite que exige um controlo apertado do espaçamento da malha

(ver Figura 3.3 e Figura 3.4). Por outro lado, permitem a flexibilidade das malhas não estruturadas e podem-se adaptar bem a geometrias complexas se forem construídas correctamente. As malhas híbridas permitem utilizar o tipo de elementos mais apropriados para cada região em função do tipo de escoamento que nela tem lugar (ver Figura 3.6). Contudo, este tipo de malhas apresenta uma maior dificuldade de geração e de adaptação, nomeadamente em tornar as malhas mais refinadas ou mais grosseiras (Kallinderis and Kavouklis, 2005).

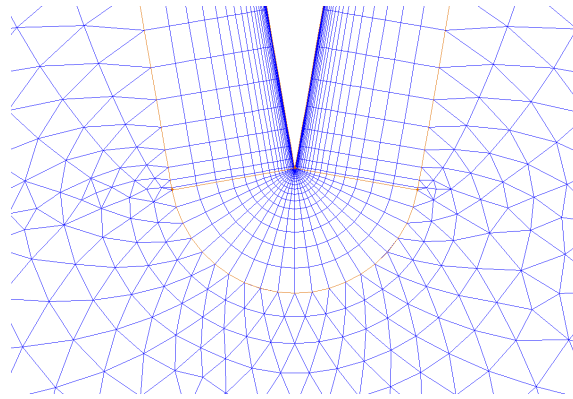


Figura 3.6: Pormenor de uma malha híbrida bidimensional (Marçal, 2012)

### 3.3 Construção da malha

A malha gerada para modelar o escoamento no rotor da turbina divide-se em três zonas. Foi criada uma zona principal, no rotor propriamente dito, e foram criadas duas zonas secundárias, à entrada e à saída do rotor, por forma a captar as perturbações introduzidas pelo rotor no escoamento a montante e a jusante deste. As malhas são geradas para cada zona de forma separada e são unidas *a posteriori*. Por sua vez, as malhas de cada uma das zonas são, também elas, compostas por várias malhas de tipologias diferentes e geradas separadamente, consoante o tipo de escoamento que é esperado para cada região dentro da correspondente zona. Assim, cada zona é dividida em regiões consoante a proximidade às paredes que envolvem o escoamento e que são a causa fundamental das perturbações introduzidas neste. O domínio foi, portanto, dividido em dez regiões no total, a que corresponderão dez malhas a gerar separadamente. Dentro da zona de entrada, criou-se uma região na camada limite da caixa exterior, uma região na camada limite do cubo e uma região no núcleo do escoamento. Na zona do rotor, criou-se uma região na camada limite da caixa exterior, uma região na camada limite do cubo, uma região na camada limite da pá e uma região no núcleo do escoamento. Na zona de saída, criou-se uma região na camada limite da caixa exterior, uma região na camada limite do cubo e uma região no núcleo do escoamento. Esta geração das malhas de forma separada para posterior agregação faz com que tenha de haver um grande rigor e uma grande coerência na sua construção. Por outro lado, é esta a razão da sua utilização,

esta forma de construção da malha permite uma maior adaptabilidade e um controlo independente de vários parâmetros desta, o que é fundamental quando se pretende que a malha seja gerada automaticamente.

Cada uma das malhas geradas pode pertencer a uma de três tipologias diferentes. A primeira tipologia, a que pertence a malha gerada em torno da pá, na região da sua camada limite, é uma malha estruturada com elementos hexaédricos. Uma segunda tipologia é utilizado nas malhas das regiões das camadas limites da caixa exterior e do cubo que são formadas por elementos com a forma de prismas triangulares. Por fim, a terceira tipologia consiste numa malha não estruturada utilizada no núcleo do escoamento. Esta malha é não estruturada e formada por elementos tetraédricos. Assim, na zona principal são utilizadas malhas das três tipologias e nas zonas secundárias são utilizadas malhas da segunda e da terceira tipologias. Todas as malhas deste trabalho foram geradas de acordo com o *cell centered scheme* pelo que os pontos distribuídos coincidirão com os vértices dos elementos.

A malha fundamental e a partir da qual serão construídas as restantes é a malha em torno da pá. Antes de mais foram definidas, a partir da superfície da pá, duas distribuições de pontos que regerão toda a construção da malha. A primeira consiste na distribuição de pontos ao longo da pá entre as secções da caixa exterior e do cubo do rotor. Esta distribuição de pontos foi efectuada recorrendo a um vector unitário que contém, para cada ponto dessa distribuição, a fracção da distância do ponto à caixa exterior relativamente à distância correspondente entre o cubo e a caixa exterior. Essa distribuição é fraccionada em três partes em que a primeira corresponde à região da camada limite da caixa exterior, a segunda à região do núcleo do escoamento e a terceira à região da camada limite do cubo. A primeira e a terceira fracções da distribuição seguem uma distribuição exponencial com crescimento no sentido do núcleo do escoamento. A segunda fracção da distribuição segue uma distribuição uniforme. As fracções desta distribuição relativas às regiões das camadas limite da caixa exterior e do cubo serão aplicadas às três zonas do escoamento (entrada, rotor e saída), como será detalhado na secção 3.3.2. A distribuição completa será aplicada na região da camada limite da pá, como será detalhado na secção 3.3.1. A segunda distribuição que rege a construção da malha é a distribuição de pontos no sentido da normal da superfície da pá. Esta será utilizada apenas na região da camada limite da pá e será também detalhada na secção 3.3.1.

Para facilitar ao leitor a apreensão de como foi efectuada a divisão da malha e, também, como forma de síntese, apresenta-se na Tabela 3.1 a tipologia de malha utilizada em cada região do escoamento assim como a divisão por zonas.

Como já explicado, uma malha não é só um conjunto de pontos distribuídos ao longo de um domínio mas é também as células que formam os volumes e que, neste caso, uma vez que se adoptou o esquema *cell centered*, coincidirão com os volumes de controlo considerados. Como tal, depois de ter os pontos todos de-

	Região da camada limite da caixa exterior	Região do núcleo	Região da camada limite do cubo	Região da camada limite da pá
<b>Zona da Entrada</b>	Malha híbrida prismática	Malha não estruturada tetraédrica	Malha híbrida prismática	—
<b>Zona do Rotor</b>	Malha híbrida prismática	Malha não estruturada tetraédrica	Malha híbrida prismática	Malha estruturada hexaédrica
<b>Zona da Saída</b>	Malha híbrida prismática	Malha não estruturada tetraédrica	Malha híbrida prismática	—

Tabela 3.1: Esquema de malhas utilizado

finidos será necessário gravar a malha num formato que contenha a informação acerca desses vértices mas também acerca dos volumes. Todas as malhas foram gravadas numa primeira fase em formato *gms*h (Geuzaine and Remacle, 2013).

### 3.3.1 Malha em torno da pá

Em torno da pá foi gerada uma malha do tipo “camada limite”. Esta é uma malha estruturada do tipo O em que uma das coordenadas é o contorno de cada secção da pá e a outra é a normal ao respectivo contorno. Começou-se por definir os pontos da camada exterior da malha (Figura 3.7) e em seguida definiram-se os pontos das camadas interiores por interpolação segundo uma distribuição do tipo exponencial (Figura 3.8). Este é um processo muito semelhante ao utilizado na criação dos pontos da pá a partir da linha média descrita na secção 2.3.2. Acrescenta-se, desta vez, uma distribuição de pontos com crescimento exponencial que está armazenada num vector unitário com dimensão igual ao número de camadas a gerar em torno da pá. Este vector é multiplicado pelo valor pretendido para a distância da última camada da malha à superfície da pá que, neste caso, é dado em função do comprimento da linha média da secção<sup>1</sup>. Tomou-se, para essa distância, o valor de 1.5% deste comprimento. Resumindo, é como se a malha em torno da pá fosse uma sucessão de expansões da própria pá que segue uma distribuição com crescimento exponencial, partindo da superfície desta. A rotina em Python que faz este procedimento encontra-se no Apêndice .5 na secção .8.

Tal como no Capítulo 2 se fez para a geração da superfície da pá, a malha foi gerada nas secções que definem a pá (neste caso duas, uma coincidente com a caixa exterior e a outra coincidente com o cubo). Entre estas duas secções a ma-

<sup>1</sup>É habitual este valor ser dado em função do comprimento da corda dos perfis, como os NACA por exemplo, mas dada a geometria tridimensional de cada secção que define a pá tal não faria sentido e optou-se por tomar o valor do comprimento da linha média.

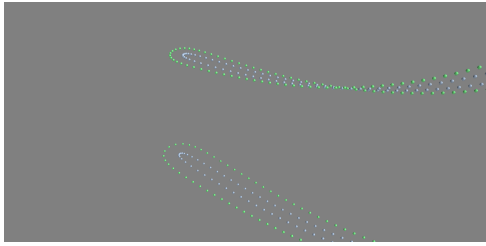


Figura 3.7: Camada exterior da malha da pá

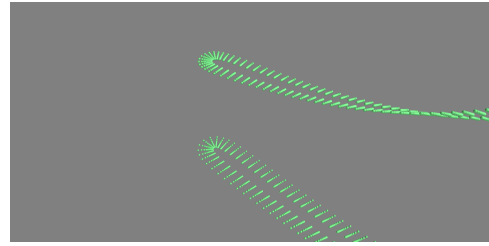


Figura 3.8: Camadas da malha da pá

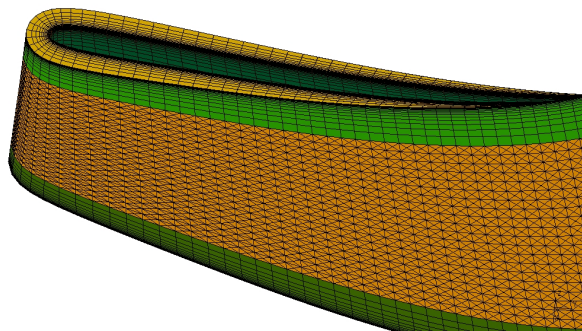


Figura 3.9: Malha da pá completa

Iha foi gerada por interpolação entre estas segundo a distribuição entre secções já referida na secção 3.3 e que tem em conta as regiões onde se vão desenvolver as camadas limite junto à caixa exterior e junto ao cubo. Como se referiu, e como se pode observar na Figura 3.9, esta distribuição foi fraccionada em três partes.

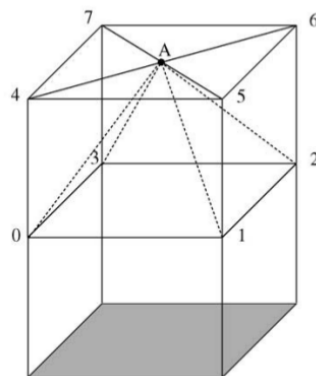


Figura 3.10: Divisão de um hexaedro em cinco pirâmides (Kallinderis and Kavouklis, 2005)

Fora da região da camada limite da pá, uma parte da malha, nas regiões das camadas limite da caixa exterior e do cubo, será híbrida e prismática e a outra, no núcleo do escoamento, será não estruturada e tetraédrica. Ora, para gerar os tetraedros é necessário definir as fronteiras com triângulos que corresponderão,

quando forem gerados os tetraedros no seu interior, a faces desses mesmos tetraedros. Como tal, é necessário que as faces quadrangulares dos hexaedros que fazem fronteira com esta parte do domínio sejam divididas em triângulos. Para isso, dividem-se os hexaedros cujas faces pertencem a essa fronteira num conjunto de cinco pirâmides conforme ilustrado na Figura 3.10.

### 3.3.2 Malha nas regiões das camadas limite do cubo e da caixa exterior

Ao contrário da malha da pá que apenas será utilizada na zona do rotor propriamente dito, as malhas das regiões das camadas limite do cubo e da caixa serão utilizadas nas três zonas. Isto porque na zona da entrada e na zona da saída será também imposta uma condição de não escorregamento nas paredes das condutas que ligam a saída das pás directrizes à entrada do rotor, o que provocará o aparecimento de camadas limite também nestas zonas. Ao modelar assim o escoamento, a solução torna-se mais realista, principalmente para a versão da turbina biradial com as pás directrizes afastadas do rotor.

Uma malha adequada para a modelação destas camadas limite, terá de ter, tal como para o caso da camada limite da pá, um crescimento não uniforme e muito pequeno nas zonas perto das paredes, como se viu na secção 3.2, nomeadamente na Figura 3.3 e na Figura 3.4. Uma distribuição com crescimento exponencial pode satisfazer estes requisitos, se for bem escolhida a razão de crescimento. É por este motivo que na distribuição já referida na secção 3.2 e utilizada na secção 3.3.1 se recorreu a um crescimento deste tipo. A distribuição utilizada nestas regiões será exactamente a mesma para permitir que haja coerência na geração das malhas e para que estas se possam unir.

Dada a complexidade da geometria do domínio do rotor da turbina biradial, este foi dividido numa série de superfícies paralelas umas às outras e que são uma interpolação das superfícies da caixa exterior e do cubo que segue a distribuição já referida e que é exactamente a utilizada na secção 3.3.1 nas regiões das camadas limite da caixa exterior e do cubo. Em cada uma destas superfícies que pertence à malha das zonas das camadas limite da caixa exterior e do cubo terá de ser gerada uma malha não estruturada bidimensional. Para gerar as malhas não estruturadas nas superfícies da caixa exterior e do cubo utilizou-se um programa desenvolvido no IST, o Vmesh2D, que só é capaz de gerar malhas em espaços com duas dimensões (Henriques, 2012). As malhas das restantes superfícies foram geradas por alteração de uma das coordenadas de cada ponto por forma a garantir que as malhas de cada uma das superfícies são coincidentes. Como tal, será necessário transformar cada uma destas superfícies em planos. Para isso, recorreu-se a uma transformação conforme que apresenta as vantagens que serão apresentadas. Em cada uma das superfícies a malha gerada será triangular. A junção dos vértices correspondentes de cada uma destas superfícies criará os prismas que serão os elementos constituintes da malha tridimensional destas regiões.

Fora das regiões das camadas limite a malha será não estruturada, como será explicado na secção 3.3.3.

### Transformação conforme

Uma transformação conforme é uma transformação de coordenadas em que há uma conservação dos ângulos locais. Como tal, uma transformação deste tipo apresenta-se como muito interessante para este caso já que possibilita que uma malha gerada no espaço transformado conserve os ângulos dos nós quando for transformada para o espaço real. Assim, os triângulos que formam os elementos bidimensionais que compõem a malha não estruturada sofrerão uma deformação reduzida quando forem transformados para o espaço tridimensional.

A transformação conforme escolhida para este caso foi a apresentada por R. I. Lewis em (Lewis, 1991) para domínios em que o fluxo é misto (radial e axial). Nas Figura 3.11 e Figura 3.12 pode ser vista a representação de uma superfície de um domínio genérico no espaço real e no espaço transformado, respectivamente.

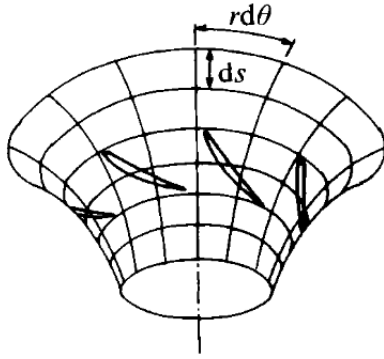


Figura 3.11: Superfície do domínio no espaço real

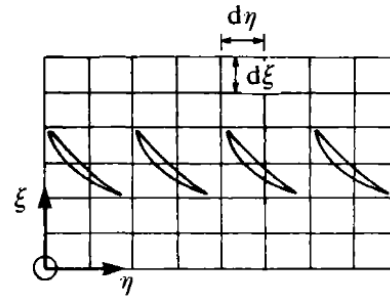


Figura 3.12: Superfície do domínio no espaço transformado

A transformação, para ser conforme, tem de obedecer à relação (Lewis, 1991):

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{r} \frac{ds}{d\theta} \quad (3.3)$$

em que  $s$  é a distância medida ao longo da secção meridional.

Considerando  $\gamma$  o ângulo cónico local da linha meridional, isto é,  $\gamma = \arctan\left(\frac{dz}{dr}\right)$ ,



facilmente se deduz que  $ds = \frac{1}{\sin \gamma} dr$  e, substituindo em (3.3), obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{r \sin \gamma} \frac{dr}{d\theta} \quad (3.4)$$

Esta condição é satisfeita pela seguinte transformação de coordenadas (Lewis, 1991):

$$\begin{cases} d\xi &= \frac{1}{\sin \gamma} dr \\ d\eta &= d\theta \end{cases}$$

Assim, depois da malha ser gerada no espaço transformado (Figura 3.13) é feita a transformação inversa para o espaço real (Figura 3.14).

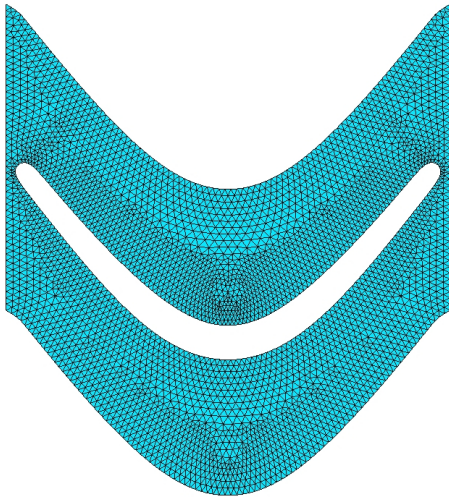


Figura 3.13: Malha no espaço transformado



Figura 3.14: Malha no espaço real

### 3.3.3 Malha no núcleo do escoamento

No núcleo do escoamento a malha gerada foi não estruturada tetraédrica. Foi necessário, pela forma como foi construída a malha, gerar uma malha destas para cada uma das três zonas. Para as gerar, recorreu-se ao gerador de malhas tetraédricas do *gmsh* (Geuzaine and Remacle, 2013). O processo é sempre semelhante sendo apenas necessário dar como entrada as superfícies envolventes do domínio em que se quer gerar a malha tetraédrica. Na geração da malha no núcleo na zona do rotor propriamente dito, partiu-se das últimas camadas das malhas das zonas das camadas limites da caixa exterior e do cubo, da malha da

secção de entrada, da malha da secção de saída e da última camada da malha da camada limite da pá da região do núcleo em que, embora seja uma malha hexaédrica, a última camada foi transformada em piramidal conforme descrito na secção 3.3.1.

Um pormenor do conjunto das malhas em que se pode ver as malhas das regiões das camadas limite, quer da caixa exterior, quer do cubo, quer da pá, e a malha do núcleo do escoamento encontra-se representado na Figura 3.15.

### 3.3.4 Parâmetros que definem a malha

Os parâmetros que definem a malha completa são:

1. o número de pontos e o vector unitário de distribuição de pontos entre a caixa exterior e o cubo;
2. o número de pontos no intradorso da pá;
3. o número de pontos no extradorso da pá;
4. o  $\gamma$  definido na secção 2.3.2 e que permite controlar a concentração de pontos na superfície da pá em função da curvatura;
5. o número de pontos e o vector unitário de distribuição de pontos entre a superfície da pá e a camada exterior da malha da camada limite desta;
6. a distância da camada exterior da malha da camada limite da pá à superfície desta;
7. o número de pontos no contorno radial da secção da caixa exterior;
8. o número de pontos no contorno circunferencial da secção da caixa exterior;
9. o número de pontos no contorno radial da secção do cubo;
10. o número de pontos no contorno circunferencial da secção do cubo;
11. o número de pontos na fronteira do domínio entre a malha da região da camada limite da caixa exterior e a malha da região da camada limite do cubo;
12. raio da entrada do domínio;
13. raio da saída do domínio.

Os modelos utilizados no Capítulo 4 requerem que  $y^+ \leq 1$  pelo que os parâmetros 1 e 5 da malha terão de ser ajustados de tal forma que esta condição seja satisfeita.

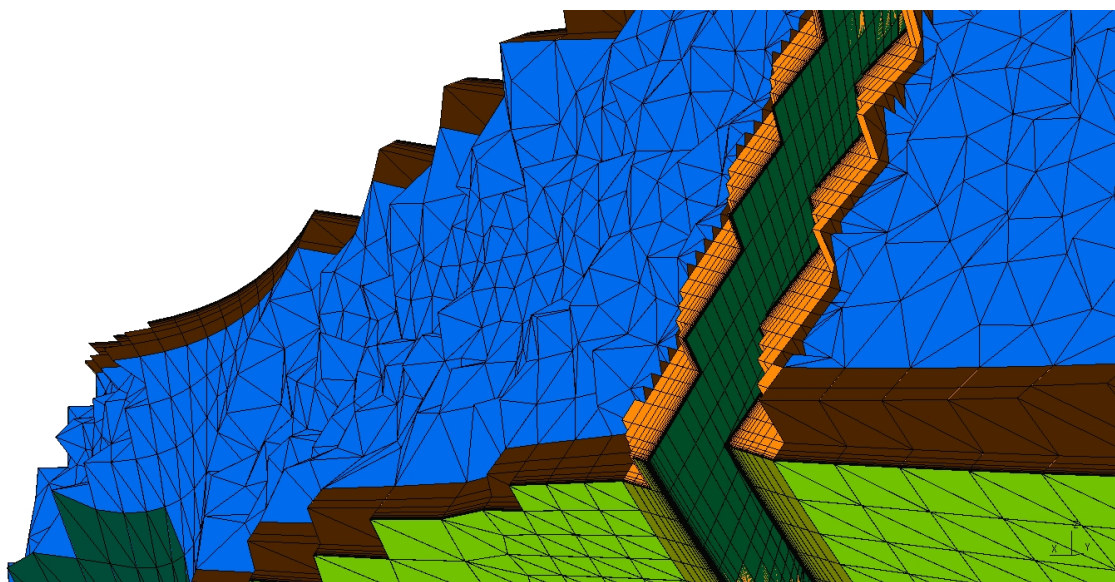


Figura 3.15: Pormenor da malha do domínio completa



## Capítulo 4

# Modelação Numérica

### 4.1 Introdução

Neste capítulo pretende-se descrever como foi modelado o escoamento no rotor da turbina utilizando uma malha gerada conforme descrito no Capítulo 3. Enquanto este último capítulo se centrou na forma como o domínio foi discretizado, o presente capítulo centra-se na definição do sistema de equações a aplicar a esse domínio e às condições de fronteira a aplicar às suas fronteiras. Apresentam-se todos os passos que permitem chegar ao sistema de equações final e todos os cálculos efectuados que permitiram definir as condições de fronteira. São também explicados os métodos numéricos utilizados na resolução do sistema de equações resultante.

Todos os cálculos do escoamento foram efectuados recorrendo ao *software* comercial Fluent que resolve as equações de Navier-Stokes recorrendo ao método dos volumes finitos e em média temporal de Reynolds para o campo médio (Reynolds-Average Navier-Stokes equations, RANS). Antes de mais, na secção 4.2, será explicado como foi resolvido o sistema de equações que rege o escoamento e quais os parâmetros escolhidos para os métodos numéricos utilizados. Os resultados destes cálculos serão apresentados e a sua análise efectuada no Capítulo 5.

### 4.2 Mecânica dos fluidos computacional

A Mecânica dos Fluidos Computacional (MFC) nasceu por volta da década de 50 do século XX com o aparecimento dos computadores digitais. Esta consiste na utilização de métodos numéricos na resolução de modelos matemáticos, traduzidos em modelos computacionais, do escoamento de fluidos e dos fenómenos associados, geralmente denominados de fenómenos de transporte (transferência de quantidade de movimento, de calor e de massa). Na MFC recorre-se principalmente a três métodos numéricos na resolução dos sistemas de equações diferenciais: o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos e o método dos volumes finitos. Com o aumento da capacidade de cálculo e de

armazenamento em memória dos computadores foi possível o desenvolvimento da MFC. Contudo a capacidade dos computadores ainda não atingiu níveis que permitam a escolha do método mais adequado, e que permita obter melhores resultados, sem ter em conta os recursos exigidos (Chung, 2002).

O *software* de simulação em MFC tem um custo bastante elevado mas que, na verdade, não se aproxima ao de uma instalação experimental de qualidade. Tem, também, a vantagem de permitir uma flexibilidade muito maior do que a que se consegue quando se efectua um trabalho experimental. Contudo, os resultados que se obtêm através de modelos computacionais requerem, sempre que estes integrem um projecto de engenharia e numa fase mais avançada do mesmo, validação experimental. No presente trabalho recorreu-se ao código comercial Fluent para efectuar todos os cálculos relativos aos escoamentos simulados no domínio gerado conforme o Capítulo 3.

#### 4.2.1 Fluent

O Fluent é um código comercial que resolve o sistema de equações que rege um escoamento recorrendo ao método dos volumes finitos para o discretizar (Fluent, 2006).

Nos cálculos efectuados considerou-se sempre o escoamento permanente, turbulento e incompressível (na prática, esta última hipótese implica que o número de Mach seja inferior a cerca de 0.3).

As equações que regem o escoamento são equações de transporte onde se incluem, como já referido, as equações de Navier-Stokes. Estas equações baseiam-se em três princípios fundamentais: a conservação de massa, a conservação da quantidade de movimento e a conservação de energia. Para todos os casos, o Fluent resolve as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento. As equações de conservação de energia são apenas utilizadas quando se analisa processos de transferência de calor ou quando o escoamento é compressível. Escoamentos turbulentos exigem o recurso a equações adicionais e apresentam grandes flutuações de pressão e de velocidade ao longo de uma vasta gama de frequências, o que dificulta enormemente a resolução das equações de Navier-Stokes. Como tal, para resolver este problema é comum tomarem-se valores médios por forma a que as equações percam a sua dependência temporal. Fala-se então de equações de Navier-Stokes em média temporal de Reynolds para o campo médio (RANS) (Fluent, 2006; Cebeci et al., 2005).

### 4.2.2 Equações de transporte

Neste caso, uma vez que se trata de um escoamento incompressível, as equações da conservação de energia ficam desacopladas das equações de conservação de massa e de conservação de quantidade de movimento e, como se verá, a conservação de massa pode-se traduzir em conservação de volume. Assim, torna-se dispensável a resolução das equações de conservação de energia, que só seriam úteis se se pretendesse conhecer o campo de temperaturas no escoamento. Como tal, nesta secção apenas se analisarão as equações da continuidade e de conservação da quantidade de movimento, e as equações de turbulência serão analisadas na secção 4.2.4.

A equação de conservação de massa, ou da continuidade, pode, para um volume de controlo infinitesimal, ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = S_m \quad (4.1)$$

em que  $S_m$  é uma fonte de matéria de qualquer natureza.

Em regime permanente, escoamento incompressível e sem criação de matéria, que é o caso, a equação pode-se reduzir a:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.2)$$

em coordenadas cartesianas onde  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  correspondem, respectivamente, às velocidades segundo  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

O princípio da conservação da quantidade de movimento resulta da aplicação da segunda lei de Newton a um volume de controlo. Deste resultam as equações da conservação da quantidade de movimento que podem, para cada uma das direcções e também para um volume de controlo infinitesimal, ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\bar{\tau}) + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F} \quad (4.3)$$

em que  $p$  é a pressão estática,  $\bar{\tau}$  é o tensor das forças viscosas,  $\rho \mathbf{g}$  é a força gravítica e  $\mathbf{F}$  são as forças exteriores que actuam sobre o elemento de fluido.

Em regime permanente, escoamento incompressível, com viscosidade constante, sem actuação de forças exteriores e com massa volúmica  $\rho$  muito baixa (como é o caso do ar), que torna a força gravítica desprezável, a equação pode

reduzir-se a:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \nabla \cdot (\bar{\tau}) = 0 \quad (4.4)$$

em que  $\bar{\tau} = \mu \nabla \mathbf{v}$ , ficando:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \quad (4.5)$$

De onde resulta, para cada uma das três componentes cartesianas:

$$\begin{aligned} x : \quad & \rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = 0 \\ y : \quad & \rho \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) = 0 \\ z : \quad & \rho \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

### 4.2.3 Referencial móvel

Na modelação do escoamento do rotor de uma turbina, como neste caso, a utilização de um domínio de cálculo em movimento (de rotação) apresenta vantagens. Por outras palavras, trata-se de resolver o sistema de equações num referencial móvel (não inercial). O recurso a um referencial móvel permite transformar o problema, que à partida, num referencial fixo, seria dependente do tempo, num problema permanente. Isto aconteceria por o número de pás do rotor ser finito pelo que, num referencial fixo, a posição das pás é função do tempo. Já num referencial móvel, que acompanhe o movimento de rotação das pás, a posição destas é independente do tempo.

Utilizou-se, portanto, um referencial cuja velocidade de rotação é constante e coincide com a velocidade de rotação do rotor. Esta transformação vai acrescentar termos às equações de movimento no referencial fixo que dizem respeito a forças de inércia, nomeadamente à força de Coriolis e à força centrífuga.

A resolução das equações pode ser feita em ordem à velocidade absoluta ( $\mathbf{v}$ ) ou em ordem à velocidade relativa ( $\mathbf{w}$ ). Estas duas velocidades relacionam-se



através da expressão:

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (4.7)$$

onde  $\boldsymbol{\Omega}$  é o vector que contém as componentes da velocidade de rotação no referencial fixo e  $\mathbf{r}$  é o vector posição do ponto em questão também no referencial fixo. Neste caso optou-se por resolver o sistema usando a velocidade absoluta  $\mathbf{v}$  como variável independente seleccionando a opção *Absolute Velocity Formulation* uma vez que só esta formulação é que permite resolver a equação de pressão e de velocidade de forma acoplada (ver a secção 4.2.5) (Fluent, 2006).

A equação da continuidade (4.2) ficará:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \iff \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad (4.8)$$

E a equação da conservação da quantidade de movimento (4.5) ficará:

$$\rho \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) + \nabla p - \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \quad (4.9)$$

em que os termos da aceleração de Coriolis e da aceleração centrífuga são agrupados em  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$  (Fluent, 2006).

Disto resulta, para uma velocidade de rotação com componente não nula apenas na direcção  $z$  ( $\Omega_x = \Omega_y = 0$  e  $\Omega_z \neq 0$ ), para cada uma das três componentes cartesianas,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , uma expressão da mesma forma que (4.6):

$$\begin{aligned} x : \rho \left( w_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) - \Omega_z v_y + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ y : \rho \left( w_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \Omega_z v_x + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ z : \rho \left( w_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

#### 4.2.4 Modelos de turbulência

O escoamento na turbina não só será resolvido num referencial em rotação como também será turbulento ( $Re = 2.02 \times 10^6$ ), como se poderá ver na secção 4.5. Um escoamento turbulento é um escoamento em que há um domínio das forças de inércia sobre as forças viscosas que actuam no fluido. Isto faz com que haja grandes flutuações de velocidade no escoamento e numa ampla gama de frequências, apresentando um movimento desordenado. As principais características da turbulência são a irregularidade, a tridimensionalidade, a difusividade e a dissipação. Devido às suas características quase caóticas, o escoamento turbulento apresenta grandes dificuldades de modelação. Como tal, existem vários modelos que procuram descrever o seu comportamento e nenhum pode ser considerado superior aos outros, mas sim mais adequado a determinado tipo de situação (Abbott and Basco, 1989).

É costume, por forma a tornar estudo dos escoamentos turbulentos mais fácil, considerar duas componentes para a velocidade: a velocidade média e a flutuação. Esta abordagem permite encontrar semelhanças na análise com aquela que é efectuada para escoamentos laminares. Para tentar eliminar a componente instacionária intrínseca à própria definição de turbulência é calculada uma média temporal para as quantidades que caracterizam o escoamento. É aqui que entra a média temporal de Reynolds para o campo médio (RANS), uma das formas de eliminar a dependência temporal do modelo do escoamento e que é utilizada pelo Fluent. Assim, para uma determinada quantidade genérica  $\phi$  tem-se:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'$$

em que  $\bar{\phi}$  é a quantidade média e  $\phi'$  é a flutuação.

Usando esta decomposição serão reescritas as equações que governam o escoamento turbulento, acrescentando os termos necessários à modelação da turbulência.

Desta forma, as equações de Navier-Stokes da continuidade em média temporal de Reynolds para campo médio e num referencial em rotação podem ser expressas da seguinte forma:

$$\nabla \cdot (\bar{w}) = 0$$

e as da conservação da quantidade de movimento:

$$x : \quad \rho \left( \bar{w}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{w}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \right) - \Omega_z \bar{v}_y + \frac{\partial p}{\partial x} \\ - \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial R_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial R_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial R_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$y : \quad \rho \left( \bar{w}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{w}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} \right) + \Omega_z \bar{v}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \\ - \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial R_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial R_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial R_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$z : \quad \rho \left( \bar{w}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{w}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} \\ - \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial R_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial R_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial R_{zz}}{\partial z} = 0$$

em que  $\bar{w}_x$ ,  $\bar{w}_y$  e  $\bar{w}_z$  são os valores médios tomados para as velocidades no referencial em rotação,  $\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_y$  e  $\bar{v}_z$  os valores médios tomados para as velocidades no referencial fixo e  $R_{ij}$  são os tensores de Reynolds.

Os tensores de Reynolds são, por sua vez, dados pela hipótese de Boussinesq em que estes são calculados através da viscosidade turbulenta  $\mu_t$  e da energia cinética de turbulência  $k$ :

$$R_{ij} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial i} \right) - \frac{2}{3} (\rho k) \delta_{ij}$$

em que  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ ).

Para fechar o sistema de equações que rege o escoamento falta apenas determinar as equações que permitam calcular  $\mu_t$  e  $k$ . Para isso, o Fluent disponibiliza vários modelos de turbulência que se baseiam no método RANS: o modelo *Spalart-Allmaras*, modelos  $k - \epsilon$ , modelos  $k - \omega$ , o modelo  $v^2 - f$ , modelos de tensores de Reynolds (RSM) e modelos *Detached eddy simulation*. O modelo de turbulência escolhido foi o  $k - \omega$  SST (*Shear Stress Transport*) uma vez que tem sido utilizado com frequência no IST na modelação de escoamentos em turbomáquinas, nomeadamente na turbina biradial no trabalho de P. Nunes (Falcão et al., 2013b), apresentando resultados satisfatórios.

O modelo  $k - \omega$  SST procura combinar as vantagens do modelo  $k - \omega$  *standard* nas zonas junto às paredes com as vantagens apresentadas pelo modelo  $k - \epsilon$  no núcleo do escoamento (Fluent, 2006). Este modelo acrescenta ao sistema

as equações de transporte da energia cinética turbulenta ( $k$ ) e da sua taxa de dissipação ( $\omega$ ) que, recorrendo à notação de Einstein<sup>1</sup>, se podem escrever:

$$k : \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \tilde{G}_k + Y_k - S_k = 0$$

$$\omega : \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) - G_\omega + Y_\omega - D_\omega - S_\omega = 0$$

onde  $\tilde{G}_k$  representa a produção de energia cinética turbulenta devida aos gradientes da velocidade média,  $G_\omega$  representa a "produção" de dissipação  $\omega$ ,  $\Gamma_k$  e  $\Gamma_\omega$  representam as difusividades de  $k$  e de  $\omega$ , respectivamente, e  $Y_k$  e  $Y_\omega$  a dissipação devido à turbulência.  $D_\omega$  é o termo de difusão cruzada e  $S_k$  e  $S_\omega$  são termos fonte definidos pelo utilizador e que neste caso serão nulos. O  $\mu_t$  é calculado em função de  $k$  e de  $\omega$  (Fluent, 2006).

O modelo  $k - \omega$  SST requer que a distância da primeira célula à parede seja tal que  $y^+ \leq 1$  (eventualmente  $y^+ \leq 5$ , dentro da sub-camada laminar), condição esta que foi respeitada graças ao ajuste dos parâmetros da malha, tal como explicado no Capítulo 3 e como será demonstrado no Capítulo 5.

#### 4.2.5 Métodos numéricos

O Fluent disponibiliza duas aproximações distintas para a resolução das equações que regem o escoamento: o *density-based-solver* e o *pressure-based-solver*. Em ambos os casos o campo de velocidades é obtido através das equações de conservação da quantidade de movimento. No *density-based-solver* as equações da continuidade (conservação de massa) são utilizadas para calcular o campo de massas específicas do fluido e a pressão é calculada através da equação de estado ( $p = p(\rho, T)$ ). Já no *pressure-based-solver* o campo de pressões é extraído directamente de uma equação de pressão que resulta da manipulação das equações de continuidade e de quantidade de movimento. Uma vez que neste trabalho se vão tratar de escoamentos incompressíveis, optou-se por recorrer ao método *pressure-based-solver* que foi desenvolvido para estes casos (Fluent, 2006).

O facto de se tratarem de escoamentos incompressíveis faz com que as equações da conservação da energia estejam descopladas das restantes equações (quantidade de movimento e continuidade). Como tal, a sua utilização só faz sentido se se pretender determinar o campo de temperaturas no domínio e como isso não é pretendido neste trabalho, as equações de conservação de energia tornam-se dispensáveis e não serão, portanto, utilizadas.

---

<sup>1</sup>Optou-se por escrever estas equações na notação de Einstein porque estas se tornariam demasiado complexas na notação adoptada para as restantes equações.

Dentro da aproximação *pressure-based-solver* existem dois modelos diferentes para resolver as equações. Num, as equações de conservação da quantidade de movimento e da continuidade são resolvidas de forma separada, é o método segregado. No outro, o método acoplado, estas equações são resolvidas em simultâneo. As restantes equações (dos modelos de transferência de energia, dos modelos de turbulência, etc) são sempre resolvidas de um modo sequencial (tal como a da quantidade de movimento e da continuidade quando se opta pelo método segregado). O método acoplado foi o escolhido por permitir uma convergência da solução mais rápida, embora tenha o inconveniente de ocupar muito mais memória (praticamente o dobro) (Fluent, 2006).

O método acoplado requer a escolha de factores de relaxação tanto para a velocidade como para a pressão e do número de Courant. Na Tabela 4.1 encontram-se os valores escolhidos para o processo de resolução das equações, que tiveram de ser ajustados devido a dificuldades apresentadas na convergência da solução.

Courant	Velocidade	Pressão	Energia cinética turbulenta	Taxa de dissipação	Viscosidade turbulenta
20	0.25	0.25	0.8	0.8	1

Tabela 4.1: Valores do número de Courant e dos factores de relaxação utilizados ao longo do processo iterativo

Como já referido, o Fluent recorre, independentemente da aproximação escolhida, ao método dos volumes finitos. O método dos volumes finitos requer que o domínio de cálculo esteja dividido em pequenos volumes de controlo, ao conjunto dos quais se dá o nome de malha (ver o Capítulo 3). As equações diferenciais de transporte, descritas nas secções anteriores, são integradas para cada elemento de volume (volume de controlo) resultando, numa forma geral, na equação (4.11). As quantidades transportadas são armazenadas no centróide de cada elemento. Uma das grandes vantagens deste método reside no facto de não apresentar problemas de convergência. O MVF garante que, para cada elemento de volume, cada uma das propriedades em causa obedece à lei da conservação (Blazek, 2005).

$$\int_V \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV + \oint \rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \oint \Gamma_\phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dA + \int_V S_\phi dV \quad (4.11)$$

em que  $\phi$  é a quantidade escalar transportada calculada no centróide de cada célula,  $\Gamma_\phi$  é coeficiente de difusão da quantidade  $\phi$  e  $S_\phi$  é a fonte da mesma quantidade por unidade de volume (Fluent, 2006).

Como todos os casos tratados serão em regime permanente, pode-se eliminar

em (4.11) os termos dependentes do tempos, ficando:

$$\oint \rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \oint \Gamma_\phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dA + \int_V S_\phi dV \quad (4.12)$$

Aplicando (4.12) a cada volume de controlo, resulta:

$$\sum_f^{N_{faces}} \rho_f \phi_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{A}_f = \sum_f^{N_{faces}} \Gamma_{\phi_f} \nabla \phi_f \cdot \mathbf{A}_f + S_{\phi_f} V \quad (4.13)$$

em que  $N_{faces}$  é o número de faces do elemento de volume e  $f$  é o índice de cada face (Fluent, 2006).

Como já foi mencionado, a quantidade  $\phi$  é calculada no centróide de cada elemento. Contudo, a resolução da equação (4.13) requer o conhecimento de  $\phi_f$  nas fronteiras dos elementos. Estes valores são calculados por interpolação dos  $\phi$ 's das células vizinhas segundo um de vários esquemas disponíveis. O Fluent disponibiliza quatro tipos de interpolação para as quantidades *forças mássicas*, *energia cinética turbulenta* e *taxa de dissipação de energia* que são: *first-order upwind*, *second-order upwind*, *power law* e *QUICK*. Foi escolhido o *QUICK* para todas essas quantidades (ver Tabela 4.2). Na verdade, o esquema *QUICK* só se aplica a malhas estruturadas e quando se recorre a malhas híbridas, como é o caso, o Fluent aplica o método *QUICK* apenas à parte da malha estruturada e aplica o método *second-order upwind* à parte da malha não estruturada. O método *second-order upwind* é uma interpolação de primeira ordem (linear)<sup>2</sup>, em que o gradiente é calculado com base nos dois elementos a montante no escoamento (elementos que estão na direcção oposta do vector velocidade). O método *QUICK* é recomendado para escoamentos em rotação e consiste numa ponderação entre o método de segunda ordem *upwind*, já explicado, e um método de interpolação centrada, em que o gradiente é calculado com base nos elementos adjacentes que partilham a face em questão (estes gradientes podem, por sua vez, ser calculados de diferentes formas, como se verá adiante). Para interpolar a pressão, o Fluent disponibiliza os esquemas: *standard*, *linear*, *second order*, *body force weighted* e *PRESTO!*. Foi utilizado o *PRESTO!* que também é o esquema recomendado para escoamentos em rotação. Já os termos de difusividade  $\Gamma_f$  são sempre obtidos recorrendo a métodos de segunda ordem (Fluent, 2006).

As interpolações de primeira ordem fazem-se com recurso ao gradiente  $\nabla \phi$  (ver equação (4.14)) para cujo cálculo o Fluent também disponibiliza três varian-

<sup>2</sup>Quando se refere a ordem de um método numérico refere-se a ordem do erro que lhe está associado. Como tal, uma interpolação de primeira ordem, uma vez que tem um erro associado de segunda ordem, é considerado um método de segunda ordem.

	Pressão	Forças mássicas	Energia cinética turbulenta	Taxa de dissipação de energia
Esquema de discretização	<i>PRESTO!</i>	<i>QUICK</i>	<i>QUICK</i>	<i>QUICK</i>

Tabela 4.2: Esquemas de discretização utilizados nos cálculos numéricos

tes: *Green-Gauss Cell-Based*, *Green-Gauss Node-Based* e *Least Squares Cell-Based*.

$$\phi_f = \phi + \nabla \phi \cdot \mathbf{r} \quad (4.14)$$

$\mathbf{r}$  é o vector posição que une o centróide do volume ao centróide da face  $f$  (Fluent, 2006).

Escolheu-se o método *Green-Gauss Node-Based* que permite obter resultados mais realistas e que, para calcular o gradiente da célula  $c_0$   $(\nabla \phi)_{c_0}$ , recorre à seguinte expressão (Fluent, 2006):

$$(\nabla \phi)_{c_0} = \frac{1}{v} \sum_f \bar{\phi}_f \mathbf{A}_f$$

em que (Fluent, 2006):

$$\bar{\phi}_f = \frac{1}{N_f} \sum_n \phi_n$$

onde, por sua vez,  $N_f$  é o número de nós que contém a face e  $\phi_n$  é a média dos valores das células que rodeiam o nó.

### 4.3 Análise do escoamento no rotor

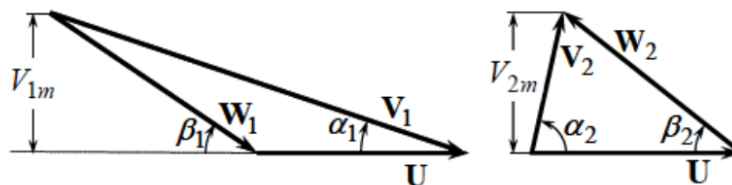


Figura 4.1: Triângulos de velocidades à entrada (esquerda) e à saída (direita) do rotor (Falcão et al., 2013b)

Na Figura 4.1 estão representados os triângulos de velocidades à entrada (1)

e à saída (2) do rotor. O vector  $u$  representa a velocidade de transporte à entrada (1) e à saída (2) do rotor, que é igual devido à simetria do rotor, e tem como norma  $U$  dada por:

$$U = \Omega R \quad (4.15)$$

em que  $\Omega$  é a norma do vector velocidade de rotação do rotor, em radianos por unidade de tempo, e  $R$  é o raio exterior do rotor da turbina.

O vector  $v$ , de norma  $V$ , representa a velocidade absoluta do fluido à entrada (1) e à saída (2) do rotor e  $\alpha$  é o ângulo entre a sua componente total e a sua componente tangencial. Este vector é determinado pelas características do estator (ângulo de deflexão) e pelo caudal admitido. O caudal admitido determina a velocidade perpendicular à secção de entrada no rotor que, neste caso, vai coincidir com a velocidade radial, representada por  $V_m$  que, por motivos de conservação de caudal, de simetria do rotor e de incompressibilidade do fluido, é uma quantidade que é igual à entrada (1) e à saída (2). Já a velocidade absoluta  $V$  é diferente à entrada (1) e à saída (2) e, em condições de funcionamento ideais deverá coincidir com  $V_m$  à saída (2) ( $\alpha_2 = 90^\circ$ ) por forma a minimizar a energia cinética do escoamento à saída. Esta situação corresponde àquela que é representada na Figura 4.2.

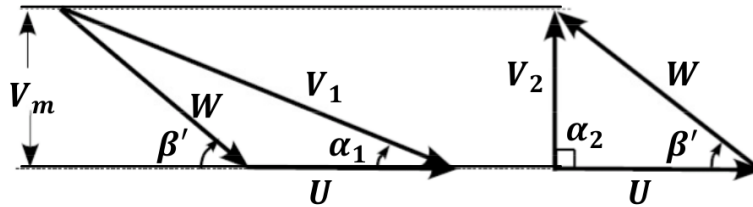


Figura 4.2: Triângulos de velocidades à entrada (esquerda) e à saída (direita) do rotor em condições nominais (Falcão et al., 2013b)

O caudal adimensionalizado é dado por  $\phi$  que é definido por:

$$\phi = \frac{Q}{\Omega D^3} \quad (4.16)$$

pelo que:

$$Q = \phi \Omega D^3 \quad (4.17)$$



Sabendo que:

$$V_m = \frac{Q}{A} \quad (4.18)$$

em que  $A$  é a área da secção de entrada do rotor dada por:

$$A = \pi D b \quad (4.19)$$

Pode-se substituir (4.17) e (4.19) em (4.18), obtendo-se:

$$V_m = \frac{\phi \Omega D^3}{\pi D b} = \frac{\phi \Omega D^2}{\pi b} \quad (4.20)$$

O vector  $w$ , de norma  $W$ , representa a velocidade relativa do fluido em relação ao rotor que é dada por:

$$w = v - u \quad (4.21)$$

$\beta$  é, portanto, o ângulo entre a componente total da velocidade relativa e a direcção tangencial. Uma vez que o rotor é simétrico, tanto  $\beta$  como  $W$  vão ser iguais à entrada (1) e à saída (2).

Nas condições de funcionamento nominais, a entrada do fluido no rotor dever-se-á dar sem incidência pelo que o ângulo  $\beta$  do fluido deverá coincidir com o ângulo  $\beta'$  da pá (ângulo que a linha média da pá faz com a direcção tangencial). Deverá, portanto, haver uma relação entre  $\beta'$  e  $\alpha_1$  que permita que tal aconteça e a escolha de um dos ângulos deverá ser feita em função do outro. Por outro lado, é pretendido que, na situação de caudal nominal, a velocidade absoluta de saída do fluido seja radial, por forma a minimizar a sua energia cinética. Desta forma, consegue-se maximizar o rendimento neste ponto, que corresponde à situação ilustrada na Figura 4.2. Observando os triângulos de velocidades dessa figura, sabe-se, pelo triângulo da saída, que  $V_m = \tan \beta' U$  e que  $W \cos \beta' = U$  e, pelo triângulo da entrada, que  $V_m = \tan \alpha_1 (U + W \cos \beta') = \tan \alpha_1 (2U)$ . Conclui-se que a relação entre os ângulos  $\beta'$  e  $\alpha_1$  deverá ser dada por:

$$\alpha_1 = \arctan \left( \frac{\tan \beta'}{2} \right) \quad (4.22)$$

A relação entre  $V_1$  e  $V_m$  é dada por (ver Figura 4.1):

$$V_1 = \frac{V_m}{\sin \alpha_1} \quad (4.23)$$

Da equação de Euler para os turbomáquinas, pode-se escrever (Falcão et al., 2013b):

$$E = \Omega R V_m (\cot \alpha_2 - \cot \alpha_1) = \Omega R V_m (\cot \beta_2 + \cot \beta_1) \quad (4.24)$$

Tal como nos outros tipos de escoamentos, o escoamento que se dá numa turbina também é caracterizado por um número de Reynolds. Este é dado pela expressão (Falcão, 2005):

$$Re = \frac{\Omega R^2}{\nu} = \frac{\Omega R^2 \rho}{\mu} \quad (4.25)$$

## 4.4 Geometria inicial

A geometria de partida escolhida foi baseada, como referido na secção 2.1, no trabalho de P. Nunes que deu origem a um modelo experimental construído pelo Instituto Superior Técnico, descrito em (Falcão et al., 2013a).

Esta tem uma distância entre o cubo e a caixa exterior à entrada e à saída de  $b = 0.22 R$ , 7 pás com uma espessura constante de  $t = 0.015 R$  e um ângulo entre estas e a direcção circunferencial  $\beta' = 40^\circ$ . No caso do presente trabalho  $b = 0.20 R$ , a espessura das pás não é constante, tendo um valor máximo de  $t = 0.030 R$ , e procurou-se que  $\beta' = 40^\circ$ . Não é possível, pela forma como a geometria da secção média da pá foi definida no Capítulo 2, garantir o ângulo  $\beta'$  é bem definido uma vez que este é função de  $\theta$  (cuja relação com o complementar de  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , é dada pela expressão (2.42)), sendo, esse sim, um parâmetro de entrada na definição da geometria. Também se começou com 7 pás.

Da geometria gerada no Capítulo 2 resultam 38 parâmetros susceptíveis de optimização (6 na definição do cubo, 6 na definição da caixa exterior, 12 na definição das duas linhas médias e 14 na definição das funções de distribuição

de espessura das duas linhas médias) e mais um secundário que é o número de pás. Apenas o número de pás será alvo de alterações ao longo do trabalho.

## 4.5 Condições de projecto

Para as propriedades do ar foram adoptados, para todo o trabalho, os valores padrão de:

- $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ;
- $\mu = 1.7894 \times 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ ;
- $p_0 = 101325 \text{ Pa}$ .

O raio exterior do rotor  $R$  foi utilizado como variável adimensionalizadora, tendo-se tomado o valor de  $R = 1 \text{ m}$  para os cálculos efectuados, uma vez que estes exigem distâncias dimensionais.

Pretende-se que a turbina a ser desenvolvida trabalhe com um número de Reynolds de  $2.02 \times 10^6$ . Este valor foi obtido por Nunes (2011) e é representativo de uma turbina à escala real, com  $D = 1.5 \text{ m}$  e  $\Omega = 500 \text{ rpm}$ . Desenvolvendo (4.25), pode-se facilmente calcular a velocidade de rotação de projecto:

$$\Omega = \frac{\mu Re}{R^2 \rho} \approx 29.5 \text{ rad/s} \approx 282 \text{ rpm}$$

Substituindo em (4.15), vem:

$$U = 29.5 \text{ m/s}$$

Uma vez que se parte de uma geometria com um  $\beta' \approx 40^\circ$  vai-se fixar um ângulo  $\alpha_1$  que permita o funcionamento do rotor em condições nominais, isto é, que permita a entrada do escoamento no rotor alinhado com as suas pás e que é dado por (4.22):

$$\alpha_1 = 22.76^\circ$$

Este valor de  $\alpha_1$  é, de resto, o valor que tem sido tomado como referência para a entrada na turbina biradial e tem sido utilizado na optimização das pás

directrizes. Será, portanto, adoptado como condição de projecto.

Com  $U$  e  $\alpha_1$  fixos, os triângulos de velocidades ficam fixados quando se impõe um caudal (que vai determinar  $V_m$ ) (ver Figura 4.1). Tem-se, portanto, neste momento, todas as condições para calcular a curva de rendimento do rotor em função do caudal.

A velocidade radial à entrada do rotor para condições de funcionamento nominais é dada por:

$$V_m = 2 U \tan \alpha_1 = 24.75 \text{ m/s}$$

à qual corresponde uma velocidade total absoluta de (ver (4.23)):

$$V_1 = 63.98 \text{ m/s}$$

Recorrendo a (4.20) pode-se calcular o  $\phi$  correspondente:

$$\phi = \frac{\pi b V_m}{\Omega D^2} = 0.132 \quad (4.26)$$

A partir do qual, fazendo uso de (4.17), se pode calcular o caudal nominal:

$$Q = 31.1 \text{ m}^3/\text{s} \quad (4.27)$$

## 4.6 Definição das condições de fronteira

O domínio do rotor está solidário com um referencial não inercial, com uma velocidade de rotação idêntica à velocidade de rotação do rotor definida como condição de projecto,  $\Omega = 282 \text{ rpm}$ , de modo a tornar o problema permanente. O cubo, a caixa exterior e a pá rodam com o referencial e as suas superfícies foram consideradas paredes (*Wall*) sem escorregamento.

À entrada do domínio foi imposta uma condição de velocidade, *velocity inlet*. Para isso, definiu-se o ângulo  $\alpha_1$ , fixado em  $\alpha_1 = 22.76^\circ$  à entrada do rotor, e a velocidade absoluta de entrada no domínio  $V_{1_d}$ . A entrada do domínio não coincide com a entrada no rotor uma vez que este teve de ser prolongado (ver

o Capítulo 3) por forma a serem detectadas as perturbações introduzidas pela turbina a montante desta já que se trata de um escoamento subsónico (as ondas de pressão propagam-se mais depressa do que o fluido). Contudo, o ângulo  $\alpha_1$  mantém-se constante entre a entrada do domínio e a entrada do rotor. A relação entre as velocidades radiais na entrada do domínio (d) e na entrada do rotor pode ser obtida por conservação de caudal:

$$Q_d = Q \rightarrow \pi D_d b V_{m_d} = \pi D b V_m \rightarrow D_d V_{m_d} = D V_m \rightarrow V_{m_d} = \frac{D}{D_d} V_m \quad (4.28)$$

Foi escolhido o valor  $\frac{D_d}{D} = 2$  uma vez que este se revelou satisfatório aquando das simulações numéricas realizadas. Resulta, então:

$$V_{m_d} = \frac{V_m}{2} \quad (4.29)$$

Como o caudal é imposto através de  $\phi$ , apenas é conhecida a componente radial da velocidade à entrada do rotor  $V_m$  (que é calculada a partir de  $\phi$  recorrendo à expressão (4.20)). A componente total é calculada pela relação que resulta do triângulo de velocidades (Figura 4.1) dada pela expressão (4.23):

$$V_{1_d} = \frac{V_{m_d}}{\sin \alpha_1} = \frac{V_m}{2 \sin \alpha_1} \quad (4.30)$$

que, desenvolvendo e recorrendo a (4.20), é possível definir em ordem a  $\phi$ :

$$V_{1_d} = \frac{\phi \Omega D^2}{2 \pi b \sin \alpha_1} \quad (4.31)$$

As quantidades turbulentas foram definidas em termos de intensidade de turbulência e do diâmetro hidráulico e mantidas constantes para todos os casos. O diâmetro hidráulico é dado por:

$$D_h = \frac{4 A}{P} \quad (4.32)$$

em que  $A$  e  $P$  são, respectivamente, a área e o perímetro da secção de entrada

do rotor. Desenvolvendo, vem:

$$D_h = \frac{4 \pi D b}{2 (\pi D + b)} \quad (4.33)$$

e substituindo pelos valores da geometria inicial obtém-se:

$$D_h = 0.388 \text{ m} \quad (4.34)$$

Para a intensidade de turbulência foi arbitrado um valor de 3% que se considerou apropriado em simulações anteriores (Nunes, 2011).

À saída foi imposta uma condição de fronteira de pressão relativa nula, *pressure outlet*. A saída do domínio também não coincide com a saída do rotor uma vez que este tem de ser prolongado (ver Capítulo 3) por forma a serem detetadas as perturbações introduzidas pela turbina a jusante desta. Foi também necessário definir as quantidades turbulentas tendo-se definido, tal como na entrada, o diâmetro hidráulico e a intensidade de turbulência. O diâmetro hidráulico é idêntico ao da entrada e é dado por (4.33). Para a intensidade de turbulência foi arbitrado um valor de 10% tal como em simulações anteriores (Nunes, 2011).

Lateralmente, o domínio é delimitado por um par de superfícies periódicas de rotação (*Periodic Surface*).

## Capítulo 5

# Resultados

### 5.1 Introdução

Neste capítulo pretende-se efectuar alguns cálculos recorrendo à malha gerada e à modelação do escoamento que foi efectuada, retirando-se algumas conclusões, nomeadamente determinando o número de pás indicado para prosseguir com uma eventual optimização da geometria do rotor. É claro que o número de pás determinado deverá ser sempre verificado uma vez alterada a geometria do rotor, já que, para uma geometria diferente, o número de pás indicado poderá ser diferente. Contudo, a optimização propriamente dita da geometria do rotor ultrapassa o âmbito deste trabalho e o número de pás indicado será para a geometria de partida. Uma vez determinado o número de pás, será efectuada uma análise ao escoamento para diferentes caudais mantendo o número de pás e a sua geometria constante.

Como já referido, todos os cálculos do escoamento foram efectuados recorrendo ao *software* comercial Fluent.

### 5.2 Análise numérica

Na Tabela 5.1 apresentam-se as características das malhas geradas. Foram geradas 4 malhas: duas malhas para 7 pás (uma delas mais refinada do que as restantes), uma para 11 pás e uma para 15 pás.

	Nº de pás	Nº de elementos	Nº de faces	Nº de nós	Memória [Mb]
Malha 1	7	1 742 681	4 167 216	791 548	1369
Malha 2	7	924 130	2 071 647	327 941	692
Malha 3	11	699 600	1 578 578	261 771	527
Malha 4	15	560 967	1 280 271	224 161	432

Tabela 5.1: Dimensão das malhas geradas

### 5.2.1 Verificação dos valores do parâmetro $y^+$

Como já foi referido, o parâmetro  $y^+$  (definido na equação (3.1)) é de fundamental importância quando se modela um escoamento turbulento.

O valor de  $y^+$  foi, numa primeira fase, mantido abaixo de 1, tal como requerido no modelo de turbulência utilizado, o modelo  $k - \omega$  SST, como se pode ver na Figura 5.1 em que é representado o valor deste parâmetro para a parede da pá para a simulação da turbina com 7 pás e um  $\phi$  de 0.08. No entanto, a malha revelou-se excessivamente refinada e, conseqüentemente, pesada ao nível da memória utilizada e do tempo de cálculo exigido, pelo que se fizeram os restantes cálculos com malhas menos refinadas em que apenas se garantiu que o valor de  $y^+$  era mantido abaixo de 5, como aceitável pelo modelo de turbulência, e como se pode ver na Figura 5.2 e na Figura 5.3.

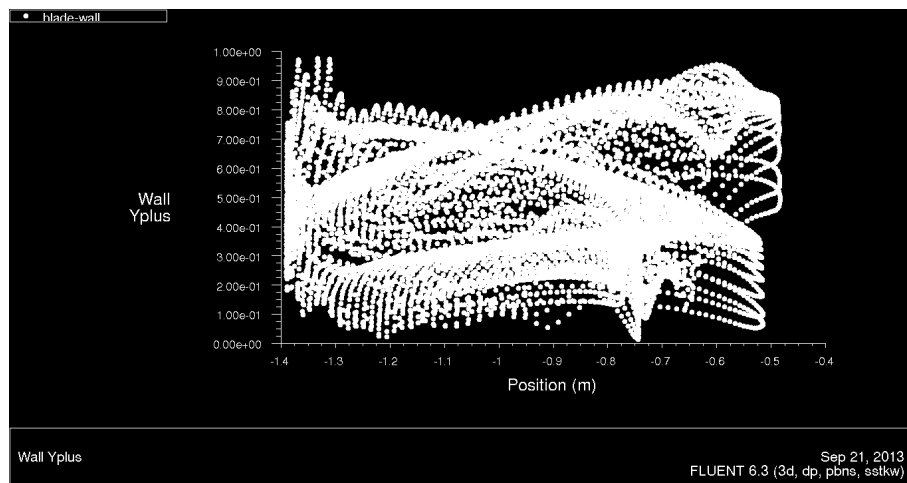


Figura 5.1: Valores do  $y^+$  para a pá no caso com 7 pás e  $\phi$  de 0.08 para a malha mais refinada

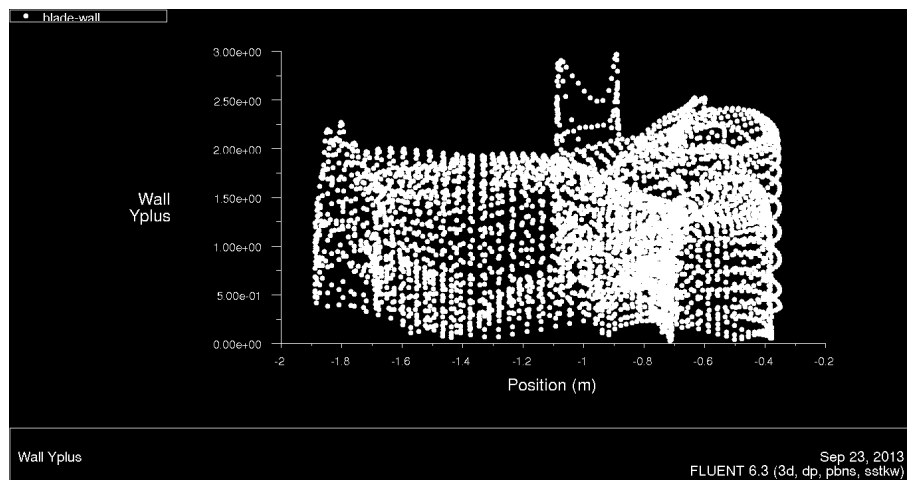


Figura 5.2: Valores do  $y^+$  para a pá no caso com 15 pás e  $\phi$  de 0.08



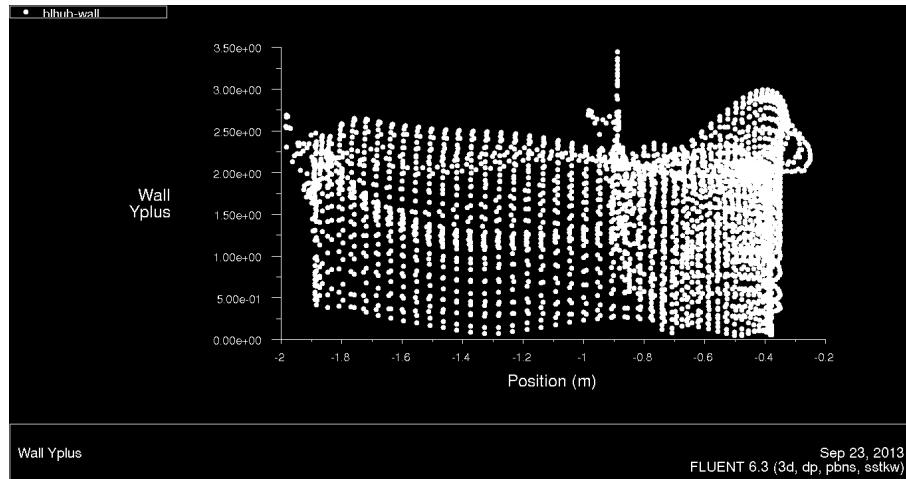


Figura 5.3: Valores do  $y^+$  para o cubo no caso com 15 pás e  $\phi$  de 0.08

### 5.2.2 Critérios de convergência

Para todos os casos foi considerado que a solução tinha convergido quando os resíduos atingissem valores da ordem de  $10^{-5}$  e quando algumas quantidades integrais de referência tivessem estabilizado nos valores pretendidos, nomeadamente a pressão e o caudal à saída. Lembra-se que o caudal foi imposto indirectamente à entrada, tendo-se definido a velocidade, e a pressão à saída foi imposta.

### Resíduos

O resíduo total de cada quantidade é definido pela soma dos resíduos em todos os elementos do domínio adimensionalizada por uma variável integral dessa mesma quantidade.

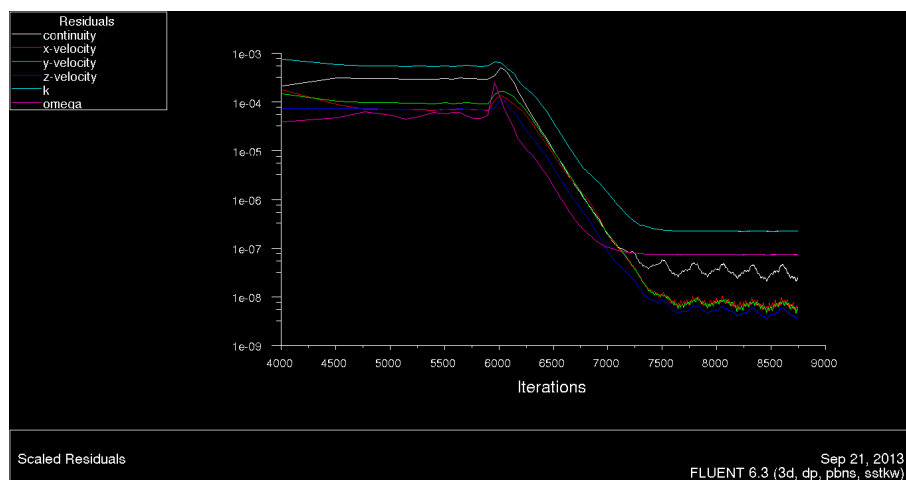


Figura 5.4: Resíduos para o caso com 7 pás,  $\phi$  de 0.08 e malha mais refinada (malha 1)

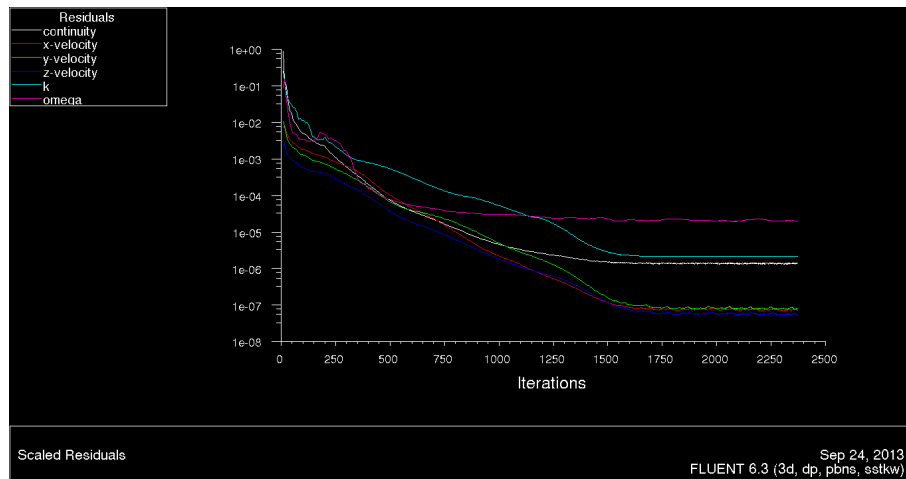


Figura 5.5: Resíduos para o caso com 11 pás,  $\phi$  de 0.08 (malha 3)

Em quase todos os casos foi possível atingir resíduos abaixo de  $10^{-6}$  para todas as quantidades excepto para a energia cinética de turbulência ( $k$ ), que geralmente estabilizou em  $10^{-4}$ .

#### Parâmetros integrais do escoamento

O processo iterativo nunca foi interrompido antes da estabilização dos parâmetros integrais de referência nos valores pretendidos. Tal nunca poderia deixar de acontecer uma vez que, por exemplo, a conservação do caudal entre a entrada e a saída do domínio é condição indispensável, se bem que não suficiente, para haver continuidade. Na Figura 5.6 e na Figura 5.7 apresentam-se, respectivamente, a evolução do caudal e da pressão estática à saída do domínio para as últimas iterações de um dos casos calculados.

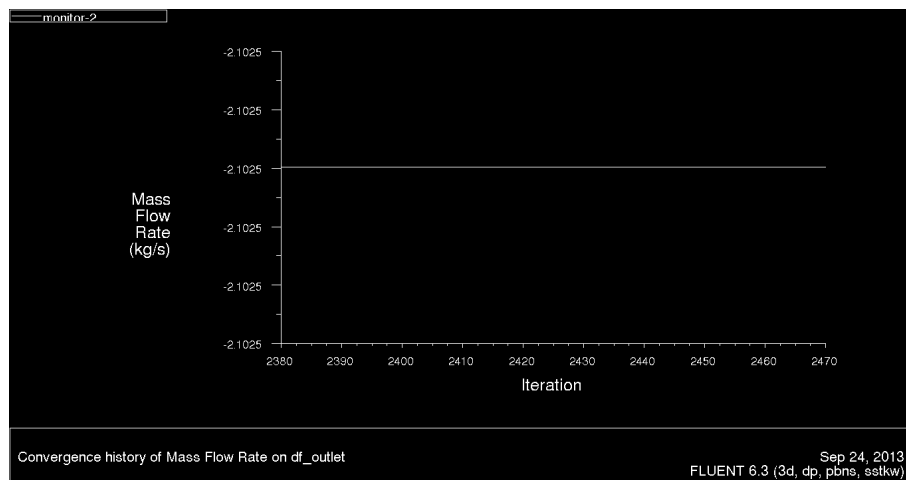


Figura 5.6: Caudal à saída para o caso com 11 pás e  $\phi$  de 0.08 (malha 3)

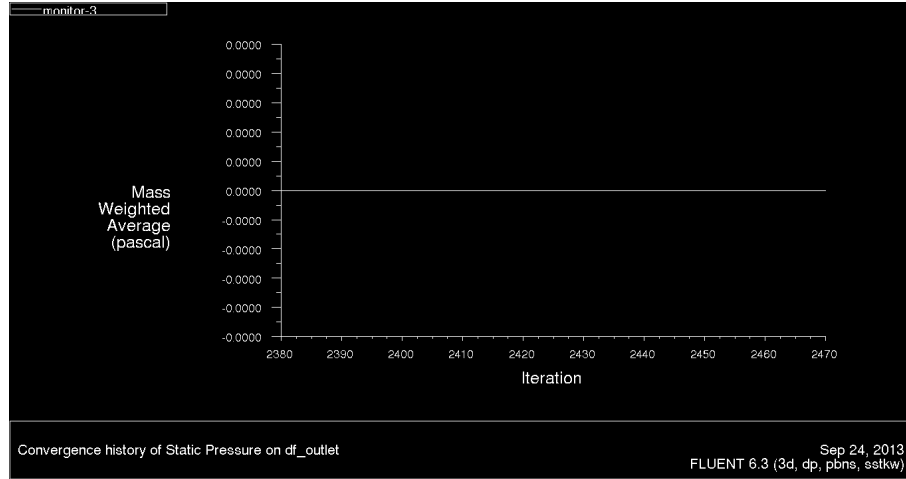


Figura 5.7: Pressão à saída para o caso com 11 pás e  $\phi$  de 0.08 (malha 3)

Como se pode ver pelas figuras supra mencionadas, estas quantidades estão completamente estabilizadas.

### 5.3 Escolha do número de pás

Numa primeira fase foram traçadas curvas de rendimento, partindo da geometria inicial, para diferentes números de pás. Desta forma será possível saber qual o número de pás com o qual valerá a pena, em trabalhos futuros, desenvolver a turbina.

Antes de mais, é importante ter em consideração que um maior número de pás tem como principal vantagem um melhor guiamento do escoamento. Contudo, este aumento provoca mais perdas viscosas, uma vez que a área de parede em contacto com o escoamento vai aumentar, e provoca também um aumento da obstrução à entrada do rotor. Esta maior obstrução provoca, por sua vez, um aumento da velocidade média do escoamento (já que diminui a secção de passagem para um mesmo caudal) que também contribui para o aumento das perdas viscosas. É pela combinação destes dois efeitos que se pressupõe a existência de um número de pás óptimo que provoque um melhor rendimento do rotor.

O rendimento do rotor da turbina é, como para qualquer conversor de energia, definido pelo rácio entre a potência extraída e a potência introduzida no sistema. É, por outras palavras e para este caso, o rácio entre a potência produzida (ao veio) e a potência disponível. Como tal, é dado por:

$$\eta = \frac{\Omega T}{\Delta p Q} \quad (5.1)$$

em que  $\Omega$  [rad/s] é a velocidade de rotação do rotor,  $T$  [Nm] é o binário no veio,

$\Delta p$  [Pa] é a diferença entre a pressão total à entrada e à saída e  $Q$  [m<sup>3</sup>/s] é o caudal que atravessa a turbina.

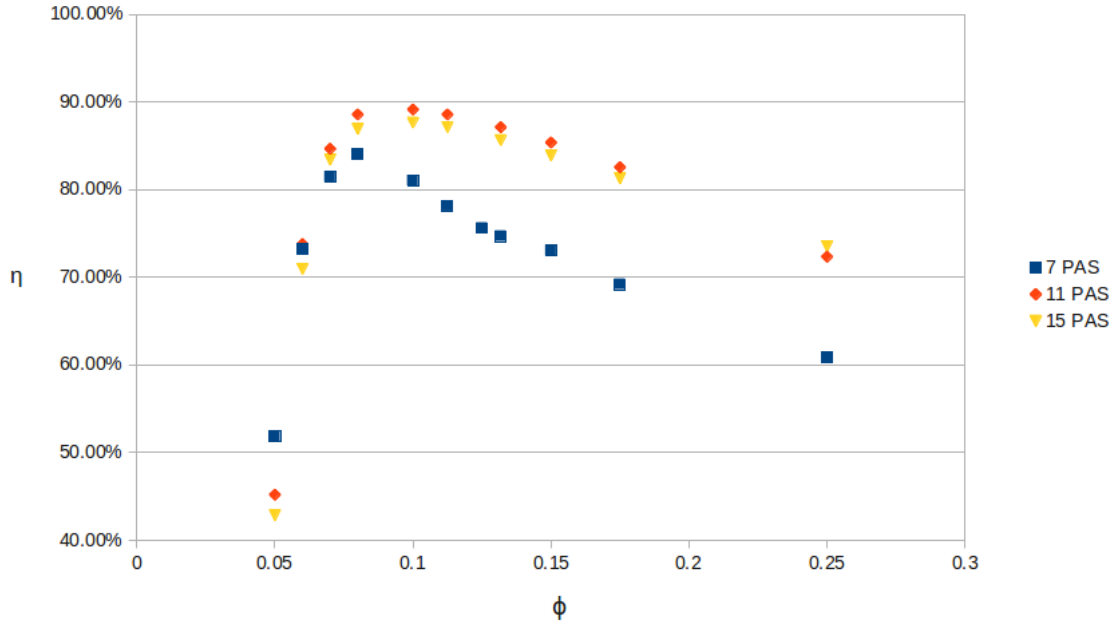


Figura 5.8: Curvas de rendimento para diferentes números de pás

Como se pode ver na Figura 5.8, o número de pás que provocou um melhor rendimento do rotor para a sua geometria inicial foi de 11. Para este número de pás, o rendimento foi superior para todos os coeficientes de caudal ( $\phi$ ) com a excepção de  $\phi = 0,25$ . Contudo, como se pode ver na Figura 5.9, para este coeficiente de caudal o escoamento já apresenta velocidades, nalgumas zonas, em que os efeitos de compressibilidade começam a não ser desprezáveis (velocidades na ordem dos 120 m/s), pelo que existirão erros de modelação mais acentuados uma vez que foi utilizado um modelo para escoamento incompressível. Por outro lado, é também verdade que, depois do ponto de rendimento máximo, o declive da curva é maior quando o número de pás é menor, facto para o qual se apresentará uma justificação na secção 5.4.

A análise dos resultados obtidos dividir-se-á em duas partes. Primeiro serão analisados para o mesmo coeficiente de caudal, os escoamentos com os diferentes números de pás no rotor. Em seguida, será efectuada uma análise mais aprofundada para os resultados obtidos para o número de pás que revelou um melhor rendimento.

Para perceber melhor os motivos do melhor rendimento obtido com 11 pás, apresentam-se, na Figura 5.10, na Figura 5.11 e na Figura 5.12, os campos de velocidades, para os três números de pás simulados, na zona perto da fronteira periódica (na zona do escoamento entre duas pás, portanto), para uma distância

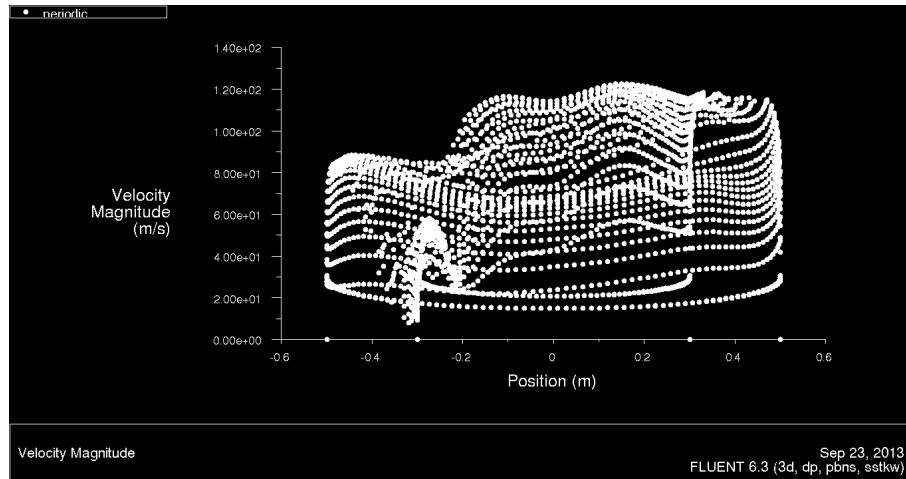


Figura 5.9: Velocidade na fronteira periódica para 11 pá e  $\phi = 0.25$

adimensional entre a caixa exterior e o cubo de 0.5 (no núcleo do escoamento), à saída da pá e para  $\phi = 0.8$ . Embora este não seja o ponto de melhor rendimento para 11 e 15 pás, é aquele em que, numa zona de rendimento já alto, os rendimentos para os três números de pás diferentes se aproximam mais.

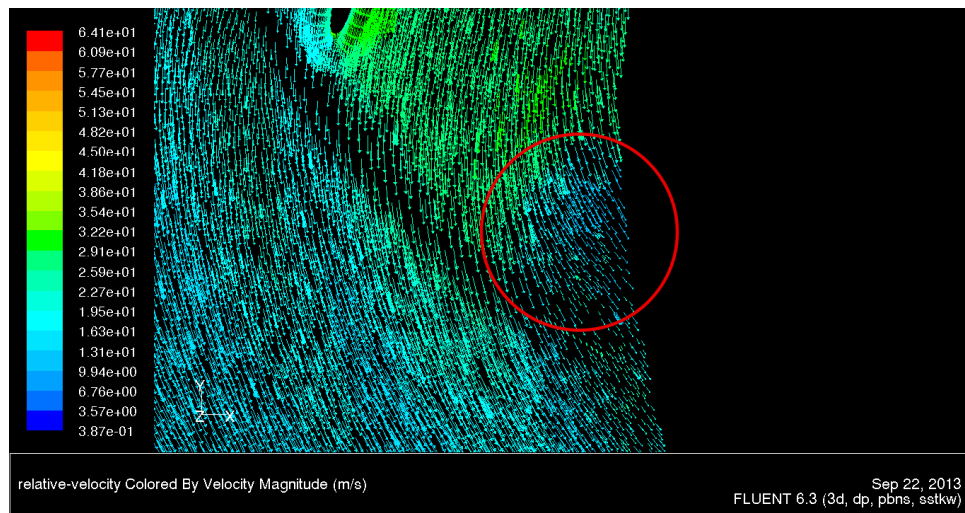


Figura 5.10: Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 7 pás

Nestas três figuras pode-se observar o efeito que a falta de guiamento tem no escoamento à saída do rotor. Na Figura 5.10 pode-se verificar, na zona em destaque, que existe uma deflexão do escoamento à saída que se traduz num aumento da componente tangencial deste e numa consequente diminuição do rendimento. Embora de forma muito mais ténue, também se verifica este efeito no caso com 11 pás, na Figura 5.11. Este efeito pode também ser verificado comparando a Figura 5.13, a Figura 5.14 e a Figura 5.15, onde se representa a magnitude da componente tangencial da velocidade relativa na fronteira periódica do domínio para os três casos, em que a única diferença é o número de pás. Confirma-se aquilo que já se podia depreender das figuras anteriores. Existe

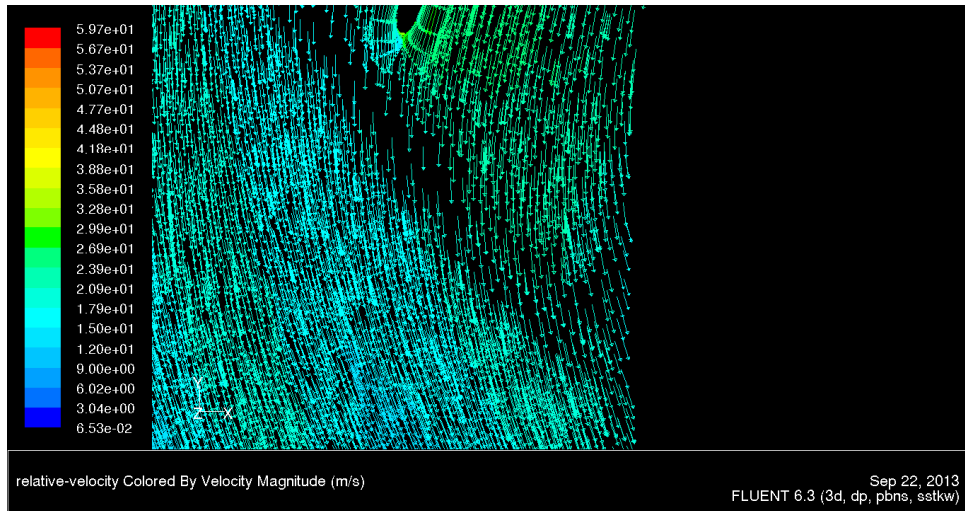


Figura 5.11: Vectors da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás

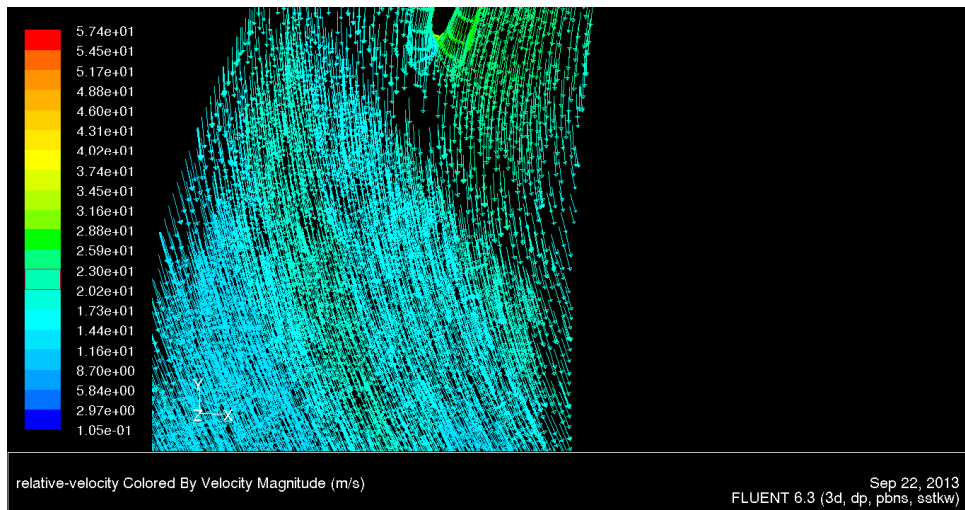


Figura 5.12: Vectors da velocidade relativa à saída do rotor com 15 pás

um problema no guiamento do escoamento à saída do rotor, sobretudo evidente com 7 pás, e que vai prejudicar o seu rendimento.

Para se analisar o aumento das perdas viscosas resultantes de uma maior área de superfície de parede presente no escoamento, recorreu-se à ferramenta que o Fluent disponibiliza e que permite calcular quantidades integradas ao longo de uma superfície, denominada *surface integrals*. Para uma maior precisão, em vez de utilizar o valor armazenado no centróide da célula, o Fluent utiliza a quantidade a integrar interpolada (ou, neste caso, extrapolada) para a superfície em causa. O integral é aproximado pela expressão discreta (Fluent, 2006):

$$\int_A \phi dA = \sum_{i=1}^n \phi_i |A_i| \quad (5.2)$$

em que  $i$  é o índice de cada uma das faces dos elementos que pertencem à superfície e  $\phi$  é a quantidade a integrar.

Na Tabela 5.2 apresentam-se os resultados dos integrais das tensões de corte estendidos à área da superfície das pás, cujo resultado é uma força de resistência ao escoamento e que se vai traduzir numa perda.

	7 pás	11 pás	15 pás
Força de corte por pá [N]	1.34	1.32	1.39
Força de corte total [N]	9.35	14.54	20.88

Tabela 5.2: Forças de corte nas superfícies das pás para os diferentes números de pás

Vê-se que a força de corte produzida em cada pá mantém-se praticamente constante mas, aumentando o número de pás aumenta a força total e as consequentes perdas. Isto vem confirmar aquilo que se supunha em relação ao aumento das perdas com o aumento do número de pás que, a partir de certo ponto, deixa de compensar o melhor guiamento do escoamento. Neste caso, este efeito começa a fazer-se sentir a partir das 15 pás. Com 11 pás, embora, como se viu, o escoamento não saia perfeitamente guiado e haja perdas por fricção maiores do que com 7 pás, atinge-se uma solução de compromisso que corresponde à melhor solução para a geometria modelizada, em que o melhor guiamento do escoamento, em relação à configuração com 7 pás, compensa o aumento das perdas viscosas e em que o pior guiamento, em relação à configuração com 15 pás, é compensado por menores perdas viscosas.

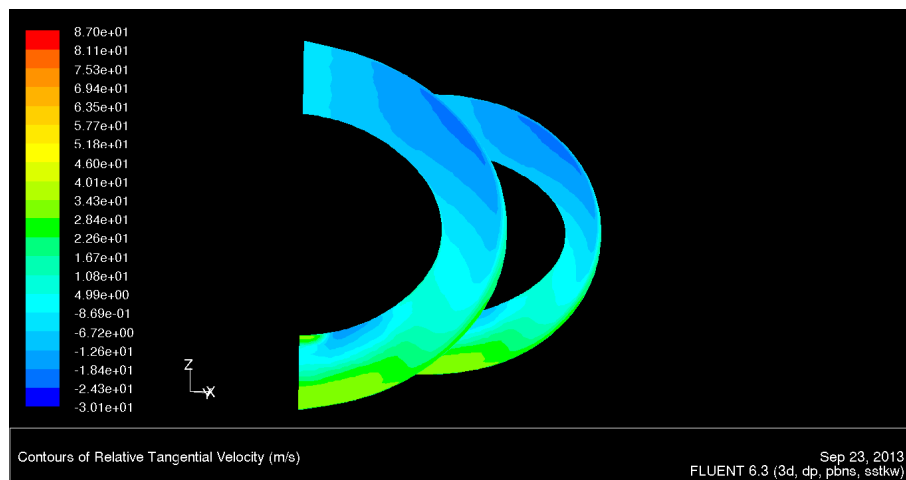


Figura 5.13: Contornos da componente tangencial da velocidade relativa na superfície periódica do rotor com 7 pás

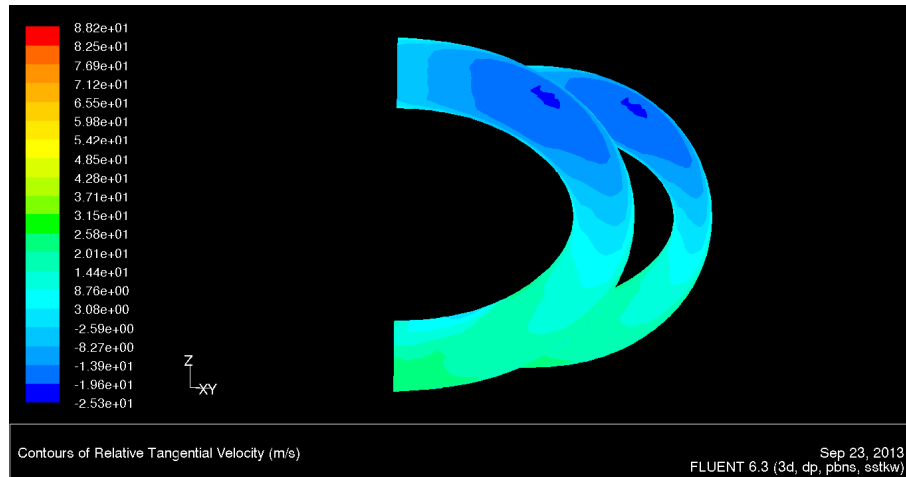


Figura 5.14: Contornos da componente tangencial da velocidade relativa na superfície periódica do rotor com 11 pás

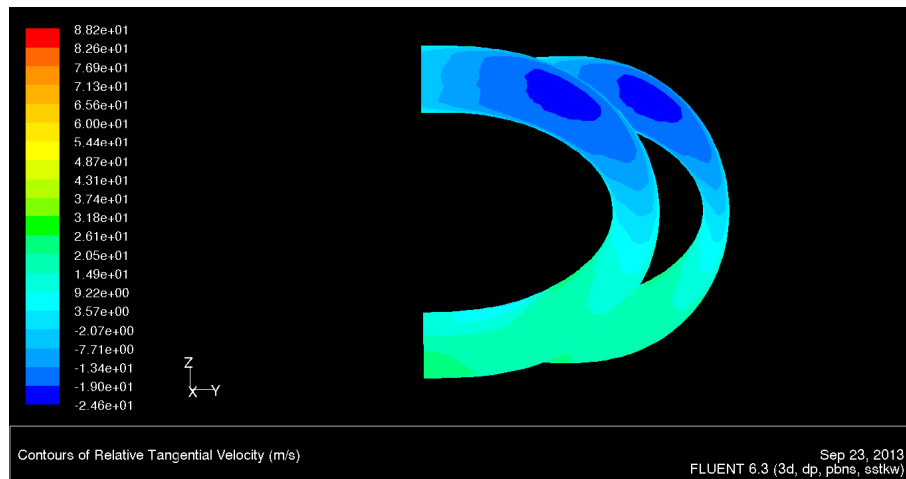


Figura 5.15: Contornos da componente tangencial da velocidade relativa na superfície periódica do rotor com 15 pás

## 5.4 Análise do escoamento para 11 pás

No Apêndice 6 encontra-se representada uma série de figuras relativas ao escoamento no rotor com 11 pás e que ajudarão a melhor interpretar a sua curva de rendimento. Analisando a curva de rendimento do rotor para 11 pás, a primeira observação a fazer é que o seu ponto de rendimento máximo não coincide com o ponto de funcionamento de projecto. Isto não corresponde a uma situação completamente estranha e até é expectável. É comum, nas turbomáquinas, que o rendimento máximo ocorra quando o caudal é inferior ao de projecto (Falcão, 2005). Isso acontece porque, com um caudal ligeiramente inferior, consegue-se que o escoamento entre na mesma sem separação ao mesmo tempo que as perdas por atrito são menores, porque a velocidade média do escoamento é mais baixa. Contudo, a diferença não costuma ser tão acentuada como neste caso.



Vai-se tentar perceber os motivos.

Antes de mais, ir-se-á tentar perceber o que é que motiva o comportamento da curva de rendimento entre o ponto de rendimento máximo e o ponto de caudal máximo, tentando perceber o motivo de o declive ser maior quando o número de pás aumenta. O ponto de rendimento máximo ocorre para  $\phi = 0.1$ . Comparando este ponto com o ponto de caudal superior modelizado,  $\phi = 0.25$ , através da Figura 5 e da Figura 10, conclui-se que, em ambos os casos, o escoamento é bastante uniforme à entrada e que, no caso do rendimento máximo ( $\phi = 0.1$ ), também é razoavelmente uniforme à saída. Já no caso do caudal máximo, o escoamento apresenta, à saída, velocidades junto à superfície do cubo muito superiores às que apresenta junto à superfície da caixa exterior, existindo, até, separação do escoamento, como pode ser confirmado pela análise da Figura 5.16.

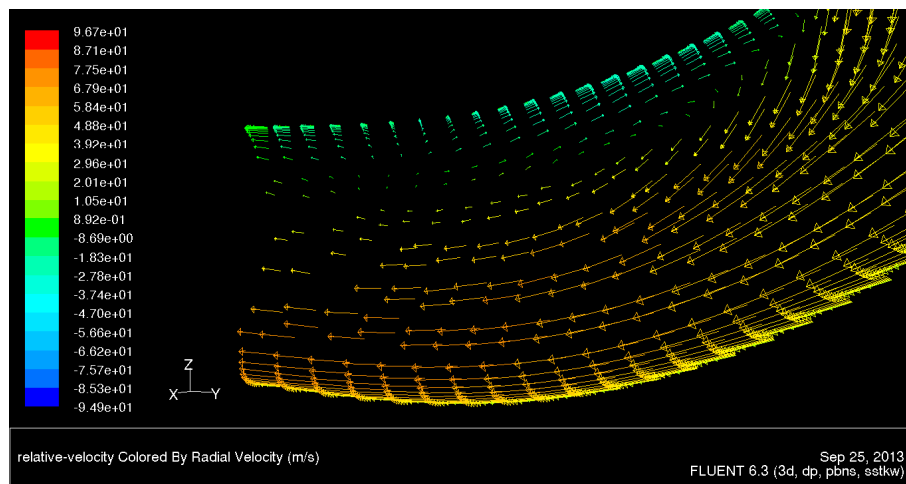
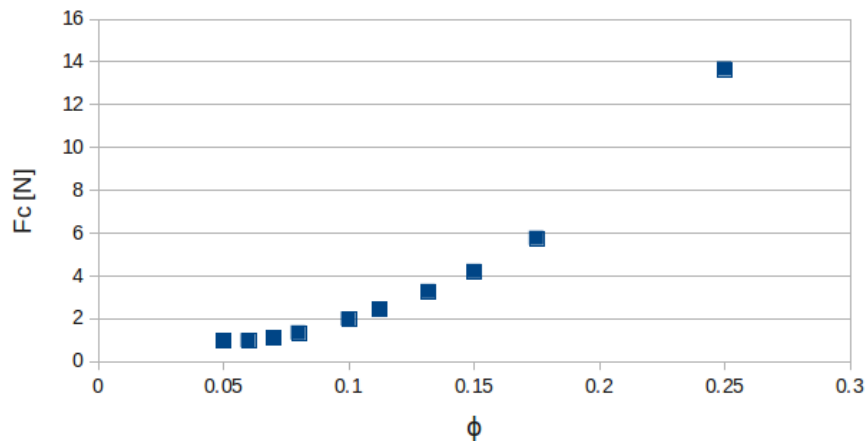


Figura 5.16: Pormenor da velocidade relativa à saída na superfície periódica do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.25$

A separação do escoamento na superfície da caixa exterior resulta do gradiente de pressão desfavorável que é gerado pela desaceleração do fluido depois de passar o ponto médio do canal (no plano de simetria). Seria conveniente, para tentar minimizar este efeito, uma diminuição da distância entre o cubo e a caixa exterior à saída do rotor. Contudo, uma vez que o escoamento é bidirecional e o rotor simétrico, esta alteração teria de ser aplicada também à entrada. Enquanto o seu efeito à saída seria positivo, uma vez que criaria um gradiente de pressão favorável que dificultaria a separação, seria negativo à entrada já que criaria um gradiente de pressão adverso que promoveria a separação. Isto leva a crer que, mais uma vez, poderá aqui ser encontrado um ponto de compromisso óptimo.

Já na zona da pá, como pode ser visto na Figura 40, o escoamento sai bastante alinhado, se bem que com velocidade não uniforme (como também pode ser confirmado pela Figura 50), e apenas separa ligeiramente no bordo de fuga.

$\phi$	0.05	0.06	0.07	0.08	0.1	0.1125	0.132	0.15	0.175	0.25
<b>Força de corte por pá [N]</b>	0.95	0.96	1.11	1.32	1.97	2.44	3.26	4.20	5.75	13.66
<b>Força de corte total [N]</b>	10.5	10.6	12.2	14.5	21.7	26.8	35.9	46.2	63.2	150.3

Tabela 5.3: Forças de corte nas superfícies das pás, para 11 pás e diferentes  $\phi$ 'sFigura 5.17: Gráfico da força de corte na pá em função de  $\phi$ 

À entrada (Figura 30) o escoamento separa no extradorso, provocando perdas adicionais. Contudo, como se pode verificar na Tabela 5.3 e na Figura 5.17, as perdas viscosas variam com o quadrado do caudal e entre estes dois pontos há um predomínio das perdas viscosas sobre as perdas de incidência, embora para  $\phi = 0.25$  as perdas por incidência e por separação também já se façam sentir.

Na Figura 25 e na Figura 27 está representado o campo de velocidades à entrada, numa superfície situada entre a do cubo e da caixa exterior, para o ponto de rendimento máximo ( $\phi = 0.1$ ) e para o ponto de caudal de projecto ( $\phi = 0.132$ ), respectivamente. Como se pode ver, existe alguma incidência do escoamento na pá quando o caudal é o de projecto, enquanto quando  $\phi = 0.1$  não existe quase incidência. A incidência é mínima para um caudal inferior ao caudal de projecto.

Ao entrar no rotor, há uma deflexão local provocada pela força de Coriolis que, quando o fluido se aproxima do centro de rotação, actua no sentido da rotação e, quando o fluido se afasta do centro de rotação, actua no sentido inverso desta. Relembra-se que a força de Coriolis tem uma direcção sempre perpendicular à velocidade pelo que apenas actua na sua direcção. A pá, por sua vez, tem uma deflexão que diminui com a aproximação ao centro e que aumenta com o afastamento deste. Isto faz com que, à entrada (sentido da aproximação ao centro de rotação), haja uma sobreposição de dois efeitos opostos. Para con-

tornar a pá, o fluido é obrigado a deflectir a sua velocidade no sentido oposto ao da rotação ao mesmo tempo que sofre uma aceleração no sentido oposto, provocada pela força de Coriolis. A deflexão em torno da pá é provocada pelo gradiente de pressão entre duas pás (há uma maior pressão no intradorso do que no extradorso, como se pode ver pelas figuras da secção .2 do Apêndice 6). Existem, pois, dois motivos que justificam o facto de o ponto de rendimento máximo se situar tão desviado do caudal de projecto para a esquerda, nomeadamente as menores perdas viscosas (ver a Tabela 5.3 e a Figura 5.17) e a menor incidência do escoamento na pá, explicada pela sobreposição de efeitos mencionada. Na saída, o escoamento está, em ambos os casos, bem alinhado, como se pode ver pela Figura 35 e pela Figura 37, e até bastante uniforme, como se pode ver pela Figura 45 e pela Figura 47. Nesta zona, a força de Coriolis tem o mesmo sentido que a força resultante do gradiente de pressão entre as pás.

Quando o coeficiente de caudal é baixo, as perdas por incidência à entrada começam a ser dominantes. Como se pode ver pela Figura 21, o escoamento entra com uma incidência muito grande e a zona de separação do escoamento estende-se ao longo de uma distância considerável no intradorso. À saída, o escoamento não está completamente alinhado (Figura 31 e Figura 41) embora não seja problemático. Neste ponto de funcionamento, há um domínio das perdas de incidência e de separação do escoamento sobre as perdas viscosas, principalmente à entrada. Nesta situação, uma turbina com menos pás consegue um melhor rendimento.

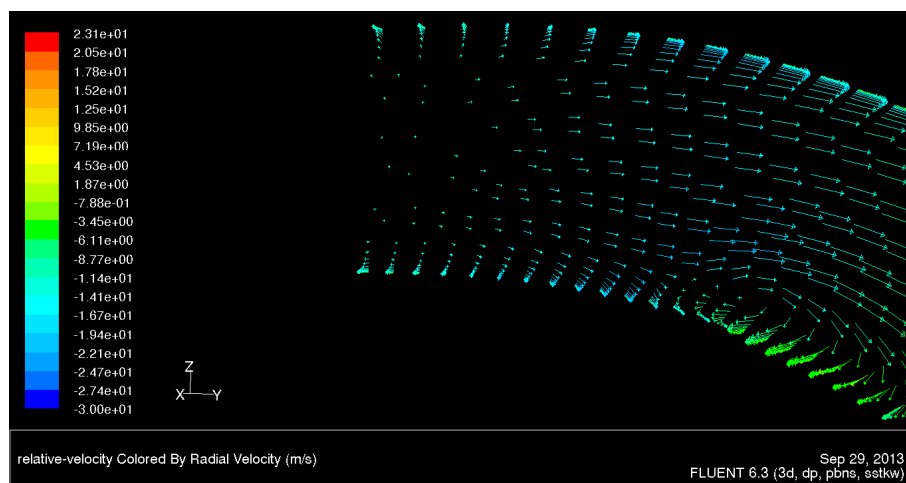


Figura 5.18: Pormenor da velocidade relativa na superfície periódica do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.05$  à entrada

Analisando as figuras da secção .2 do apêndice 6, conclui-se que a distribuição da pressão ao longo da pá está longe de ser uniforme. A uniformização da distribuição da pressão permitiria aumentar o rendimento do rotor, uma vez que se atenuariam os gradientes de pressão ao longo do escoamento, o que se consegue fazer, de forma eficaz, através da optimização da distribuição da espessura ao longo das pás (Gomes et al., 2012a).

Por fim, pode-se ver que, pela análise das figuras da secção .5 do apêndice 6 que mostram o perfil bidimensional das velocidades relativas à saída do rotor, o escoamento à saída do rotor é muito pouco uniforme. Este facto terá inevitáveis consequências no desenho do difusor que terá um papel de grande importância na uniformização do escoamento e na diminuição da sua energia cinética, se se pretender que a turbina tenha um bom rendimento.

## Capítulo 6

# Conclusões

Com este trabalho pretendia-se criar ferramentas para o desenho do rotor de uma turbina de ar auto-rectificadora que tem vindo a ser desenvolvida no IST para aproveitamento de energia das ondas através de CAO.

Foi desenvolvido, com sucesso, um código em Python que permitirá a optimização da turbina biradial. A geometria de todo o rotor é definida recorrendo a 38 parâmetros de entrada. Uma malha é gerada e o cálculo do rendimento da turbina é efectuado de forma automática.

Partindo-se de uma geometria inicial inspirada na geometria já construída no IST para um modelo experimental (Falcão et al., 2013a), determinou-se o número ideal de pás para uma turbina à escala real. O resultado a que se chegou, 11 pás, está de acordo com o resultado obtido por P. Nunes, num trabalho realizado na mesma turbina (Falcão et al., 2013b). Analisou-se o escoamento comparando o seu comportamento para diferentes números de pás, procurando interpretar os resultados obtidos, e comparando, para um número fixo de pás, o seu comportamento para diferentes caudais. Os resultados obtidos são consistentes em relação aos obtidos nos demais trabalhos realizados na turbina biradial. Até ao ponto de rendimento máximo as perdas são dominadas pela incidência do escoamento na pá. A partir desse ponto as perdas dominantes são as por atrito (viscosas) até que se atinge um ponto em que começam a reaparecer perdas por incidência e por separação. O gerador de malha revelou-se robusto e eficaz, tendo gerado malhas de boa qualidade e que permitiram obter resultados satisfatórios.

Para uma primeira optimização sugere-se, desde já, uma diminuição da distância entre o cubo e a caixa exterior à saída do rotor (e, consequentemente, à entrada). Concluiu-se, também, a grande importância que terá o desenho do difusor por forma a uniformizar o escoamento à saída que, para caudais acima do caudal de projecto, é extremamente heterogéneo. Também se concluiu que a distribuição de espessura das pás da geometria inicial está longe de ser a melhor devido à não uniformidade da distribuição da pressão nas superfícies das pás.

Para a realização de trabalhos futuros sugere-se a utilização do código criado para proceder à optimização do rotor, numa primeira fase, e, numa segunda fase, da turbina completa, juntando o rotor com o estator e modelando a sua interface. Deverá ser efectuado um estudo aprofundado da malha e os parâmetros desta deverão ser devidamente ajustados. Sugere-se o acoplamento do código criado a um algoritmo de optimização por forma a tornar todo o processo automático. Propõe-se, também, que seja feita uma primeira optimização de um difusor dada a grande falta de uniformidade do escoamento à saída do rotor, antes de optimizar a turbina completa.

# Bibliografia

- I.H. Abbot and A.E. Doenhoff. *Theory of Wing Sections*. Dover Publications, NY, 1959.
- M.B. Abbott and D.R. Basco. *Computational Fluid Dynamics: an Introduction for Engineers*. Longman Scientific and Technical, Harlow, 1989.
- C.J.S. Alves. *Apontamentos das aulas, Localização de raízes - Método da bissecção*. Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1996.
- J.D. Anderson. *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. McGraw-Hill, New York, 1995.
- J.A.T. Barbosa. *Álgebra Linear e Geometria Analítica II*. FEUP, Porto, 2005.
- J. Blazek. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. Elsevier, Oxford, 2005.
- T. Cebeci, J.P. Shao, F. Kafyeke, and E. Laurendeau. *Computational Fluid Dynamics for Engineers: From Panel to Navier-Stokes Methods with Computer Programs*. Springer, NY, 2005.
- T.J. Chung. *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- A.F.O. Falcão. *Turbomáquinas*. Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2005.
- A.F.O. Falcão. *Energias Renováveis*. Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2007.
- A.F.O. Falcão and L.M.C. Gato. Air Turbines. In: A. Sayigh. *Comprehensive Renewable Energy*, volume 8. Elsevier, Oxford, 2012.
- A.F.O. Falcão, L.M.C. Gato, and E.P.A.S. Nunes. A novel radial self-rectifying air turbine for use in wave energy converters. part 2. results from model testing. *Renewable Energy*, 53(0):159 – 164, 2013a.
- A.F.O. Falcão, L.M.C. Gato, and E.P.A.S. Nunes. A novel radial self-rectifying air turbine for use in wave energy converters. *Renewable Energy*, 50(0):289 – 298, 2013b.
- Incorporated Fluent. *FLUENT 6.3 User's Guide*. 2006.
- C. Geuzaine and J.F. Remacle. *Gmsh Reference Manual*. 2013.

- R.P.F. Gomes, J.C.C. Henriques, L.M.C. Gato, and A.F.O. Falcão. Multi-point aerodynamic optimization of the rotor blade sections of an axial-flow impulse air turbine for wave energy conversion. *Energy*, 45(1):570 – 580, 2012a.
- R.P.F. Gomes, J.C.C. Henriques, L.M.C. Gato, and A.F.O. Falcão. Hydrodynamic optimization of an axisymmetric floating oscillating water column for wave energy conversion. *Renewable Energy*, 44(0):328 – 339, 2012b.
- J.C.C. Henriques. Vmesh2d: a two-dimensional hybrid mesh generator for vertical axis wind turbines. 2012.
- D.H. House. *Computer Graphics Lectures: Spline Curves*. Clemson University, Clemson, 2011.
- IEA. Key world energy statistics. Technical report, 2013.
- Y. Kallinderis and C. Kavouklis. A dynamic adaptation scheme for general 3-d hybrid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(48?49):5019 – 5050, 2005.
- I.J. Kenneth. *Geometric Modeling Notes*. University of California, Davis, 2000.
- A. Khawaja, T. Minyard, and Y. Kallinderis. Adaptive hybrid grid methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189(4):1231 – 1245, 2000.
- K. Ko, T. Maekawa, and N.M. Patrikalakis. *Computational Geometry - Lecture Notes*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 2003.
- P. Lermusiaux. *Numerical Fluid Mechanics - Lecture Notes*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 2011.
- R.I. Lewis. *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*. Cambridge University Press, 1991.
- D. Marçal. Estudo numérico de uma pequena turbina eólica de rotor tipo h. Master's thesis, Instituto Superior Técnico, 2012.
- H.L. Morgan. A computer program for the analysis of multielement airfoils in two-dimensional subsonic, viscous flow. *NASA Langley Research Center*.
- P. Nunes. Turbina auto-rectificadora bi-radial. Master's thesis, Instituto Superior Técnico, 2011.
- Ohio. *Lecture 13, Nonlinear Systems - Newton's Method*. Ohio University, Ohio, 2008.
- C. Rodrigues. Projecto das pás directrizes fixas de uma turbina auto-rectificadora de acção para aproveitamento da energia das ondas. Master's thesis, Instituto Superior Técnico, 2009.
- J.J. Shah and M. Mäntylä. *Parametric and Feature-Based CAD/CAM: Concepts, Techniques and Applications*. John Wiley & Sons, 1995.



- R. Starzmann. *Aero-Acoustic Analysis os Wells Turbines for Ocean Wave Energy Conversion*. PhD thesis, Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät der Universität Siegen, 2012.
- G. Strang. *Lecture 21 video: Boundary Conditions, Splines, Gradient, Divergence*. Massachusetts Institute of Technology, 2008.



# Figuras

São apresentadas algumas figuras relativas à análise do escoamento no rotor com 11 pás, para os vários coeficientes de caudal modelados.

Nas figuras em que se representam as superfícies periódicas, é apresentado um par de superfícies iguais que delimitam o domínio que foi calculado.

Nas figuras em que se representam as superfícies das pás, também são apresentadas duas, sendo que a da esquerda corresponde ao intradorso e a da direita corresponde ao extradorso.

## .1 Velocidade radial nas superfícies periódicas

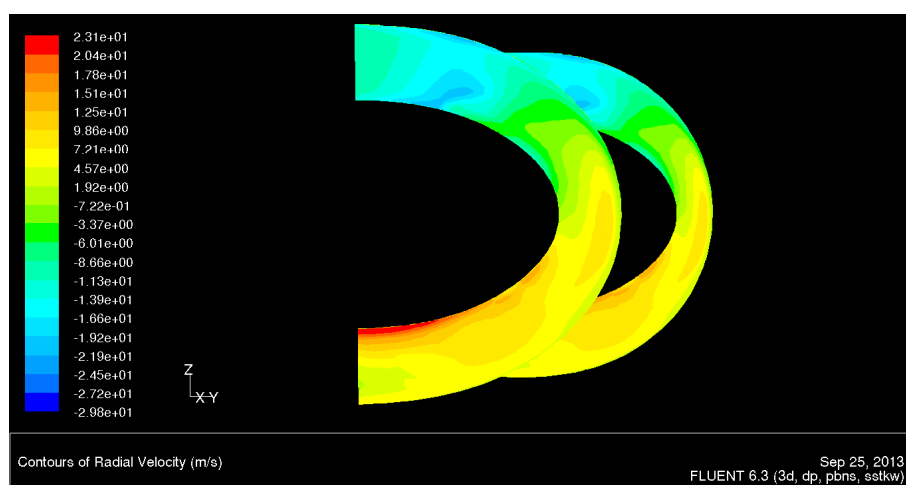


Figura 1: Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.05$

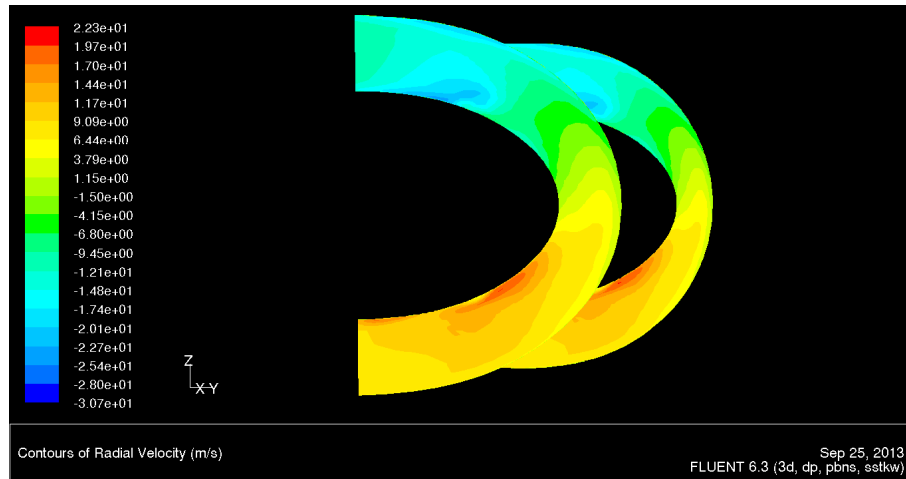


Figura 2: Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.06$

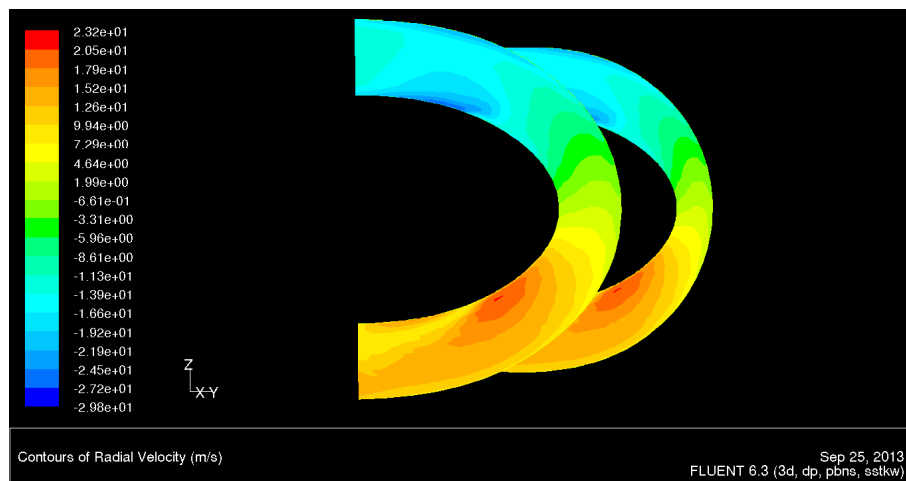


Figura 3: Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.07$

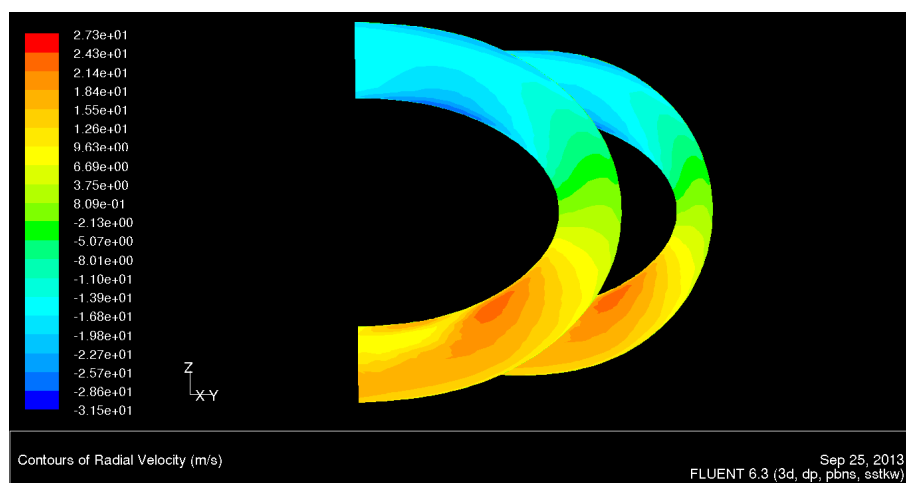


Figura 4: Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.08$

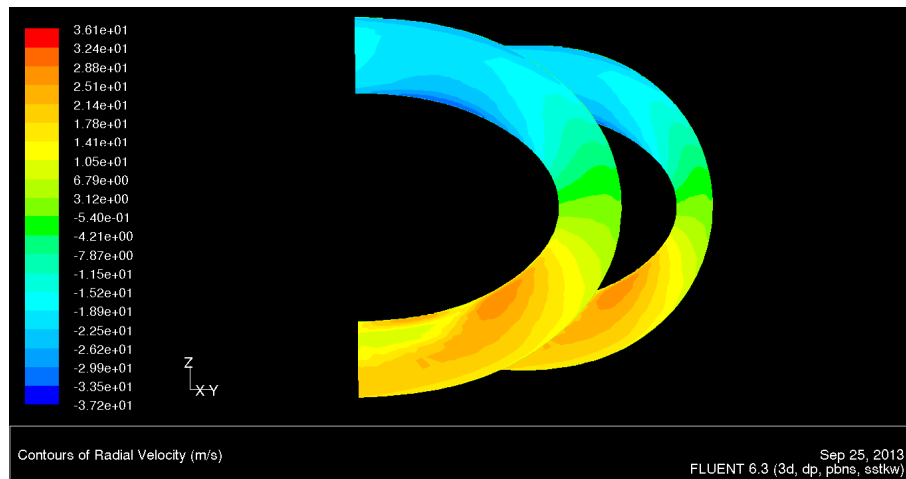


Figura 5: Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.1$

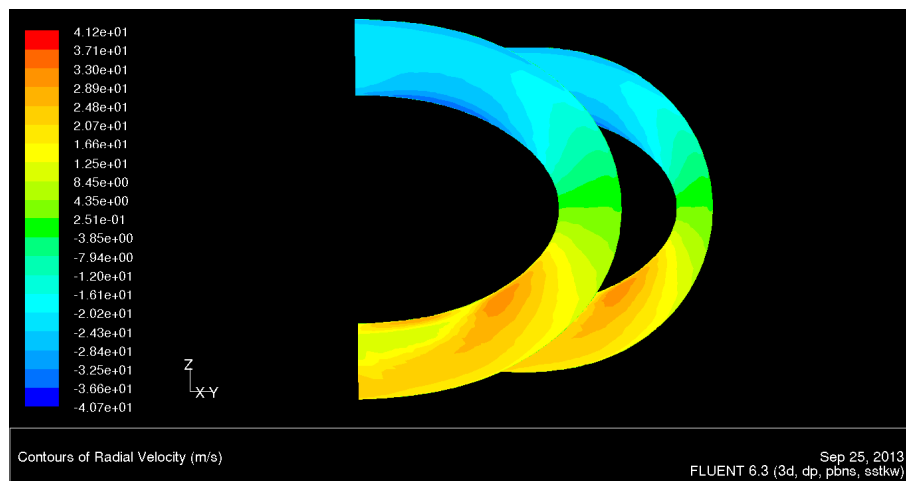


Figura 6: Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.1125$

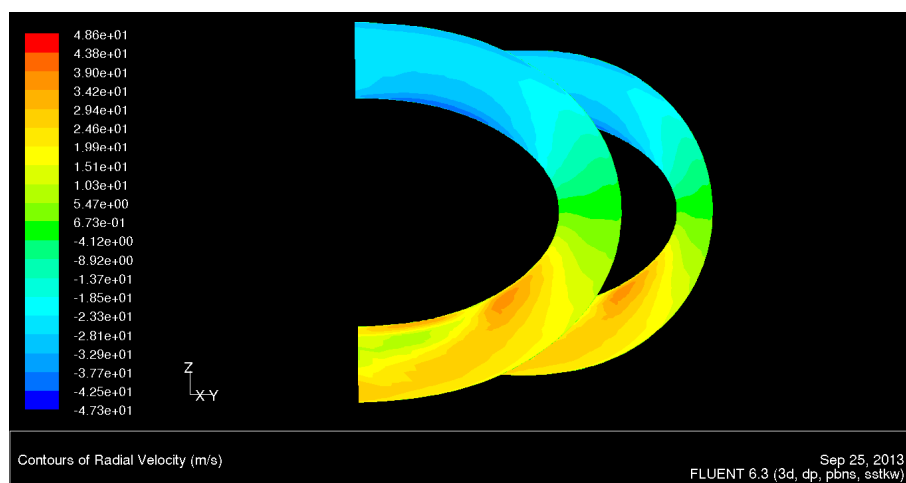


Figura 7: Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.132$

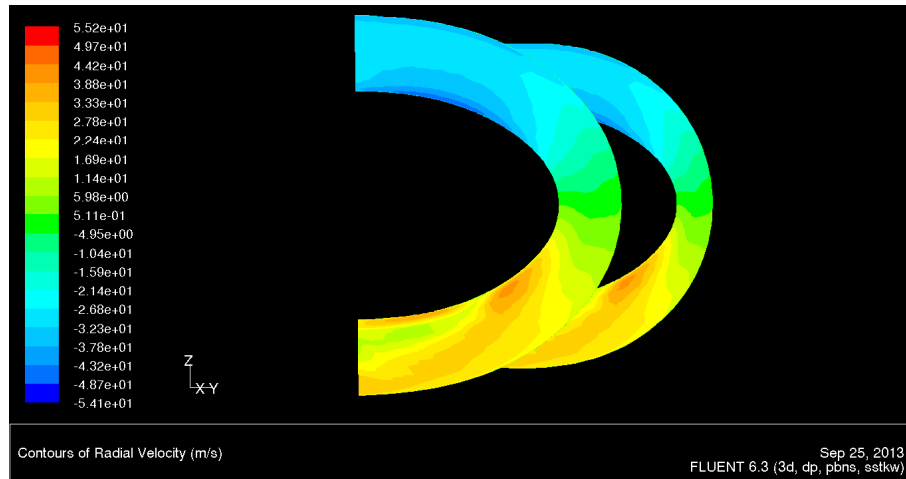


Figura 8: Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.15$

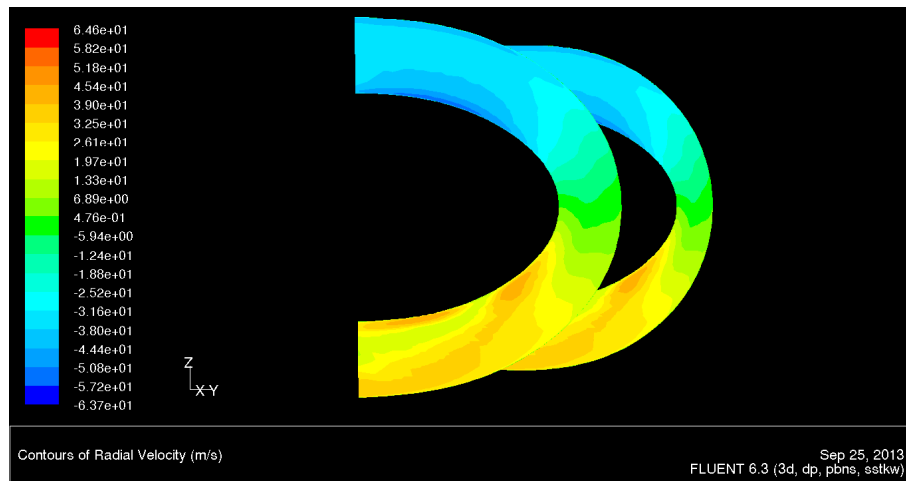


Figura 9: Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.175$

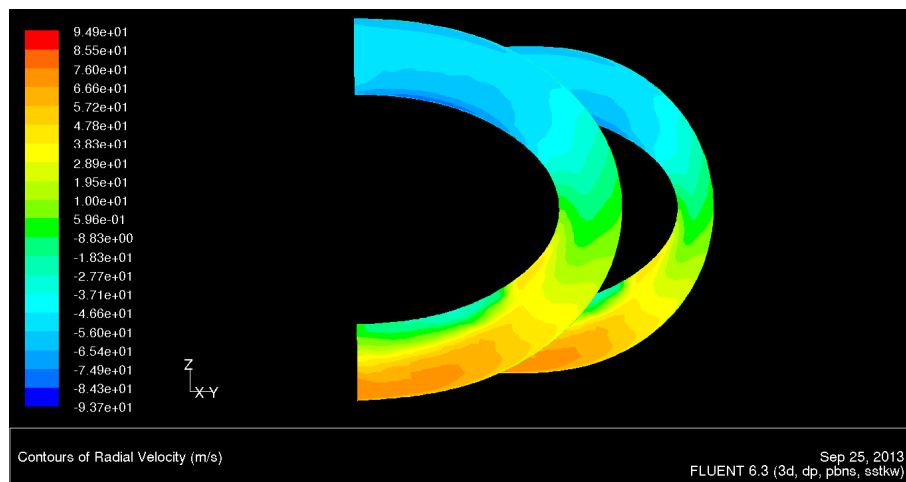


Figura 10: Velocidade radial na superfície periódica do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.25$

## .2 Pressão estática na superfície da pá

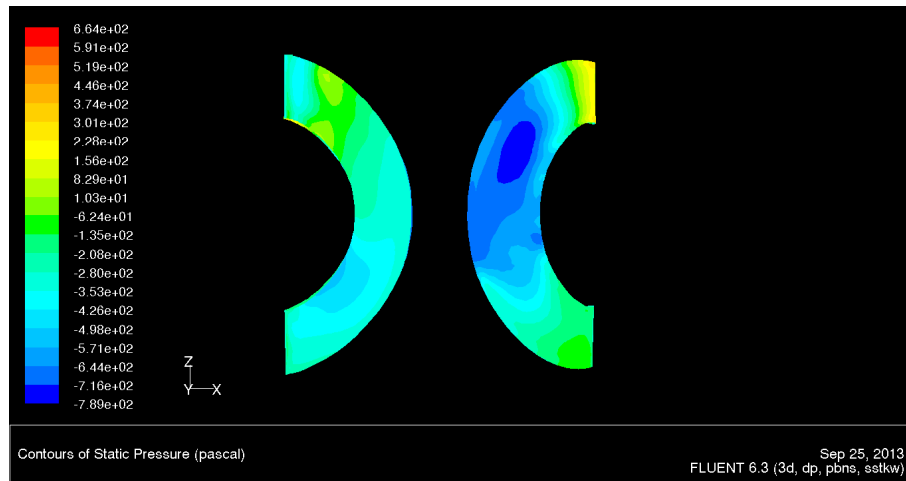


Figura 11: Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.05$

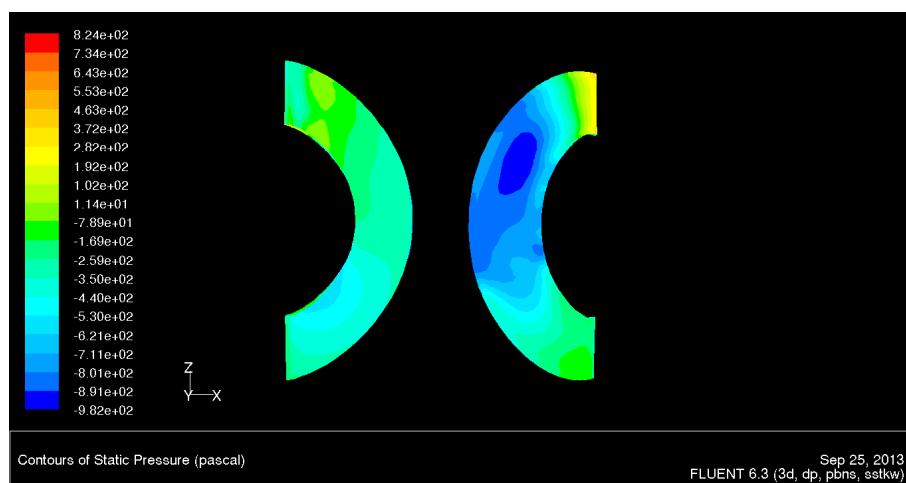


Figura 12: Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.06$

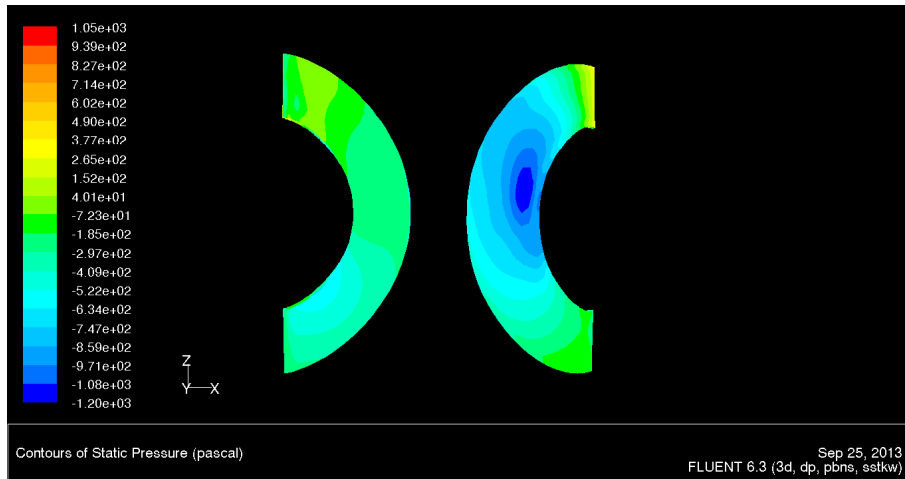


Figura 13: Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.07$

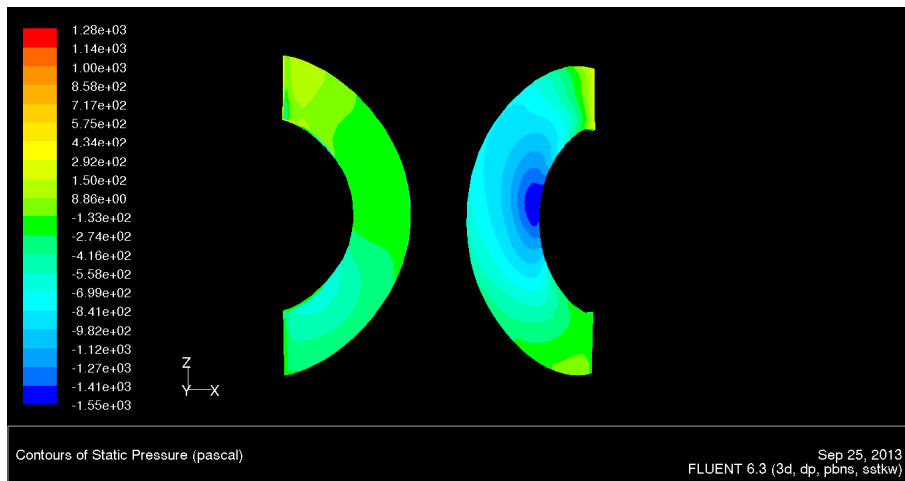


Figura 14: Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.08$

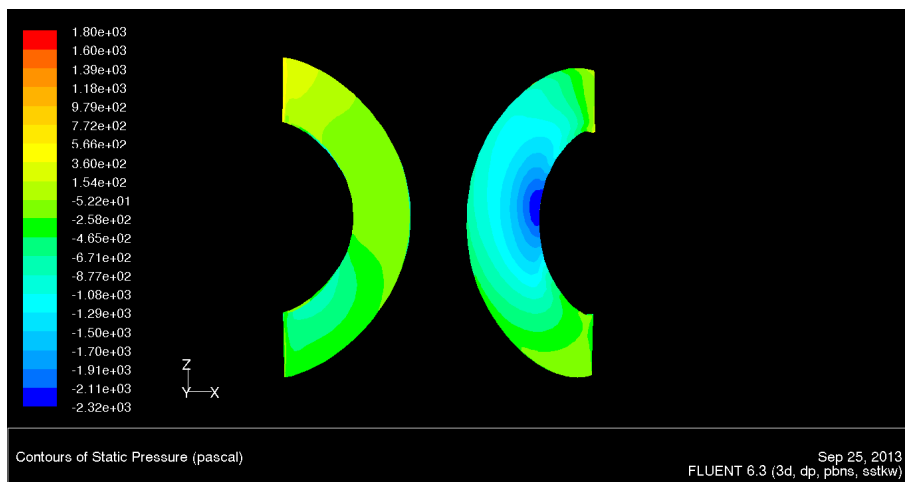


Figura 15: Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.1$



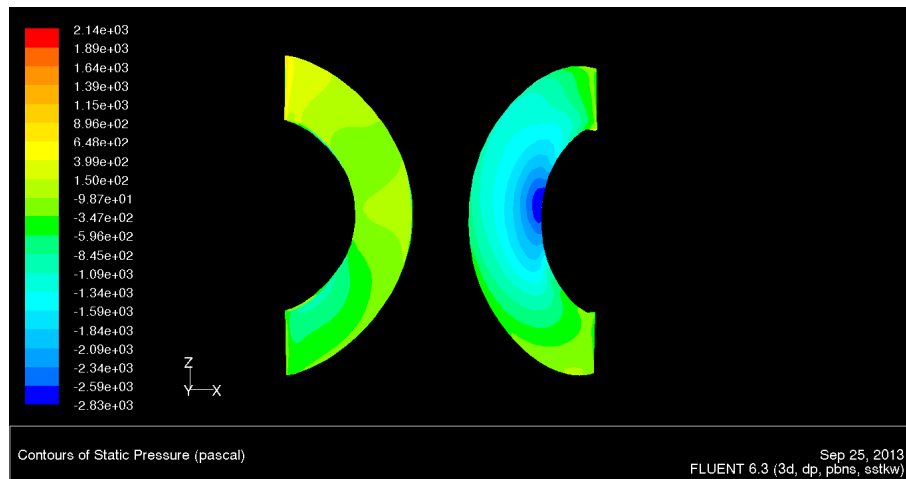


Figura 16: Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.1125$

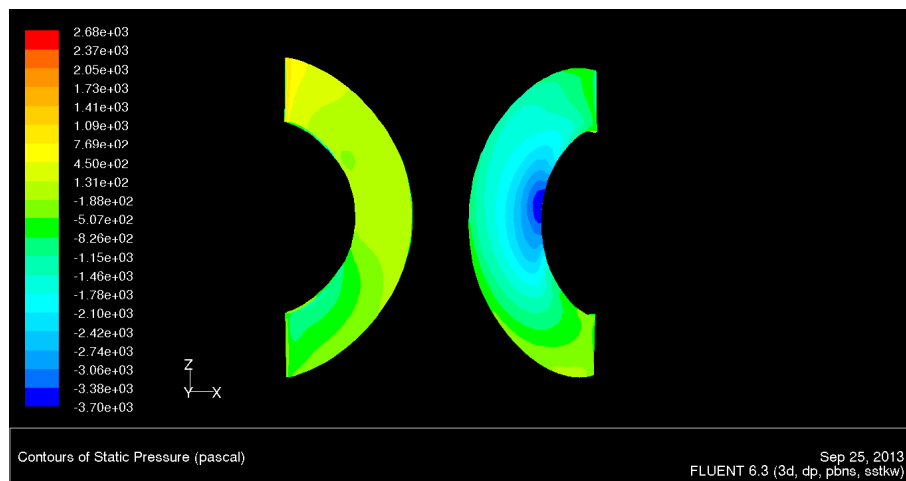


Figura 17: Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.132$



Figura 18: Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.15$

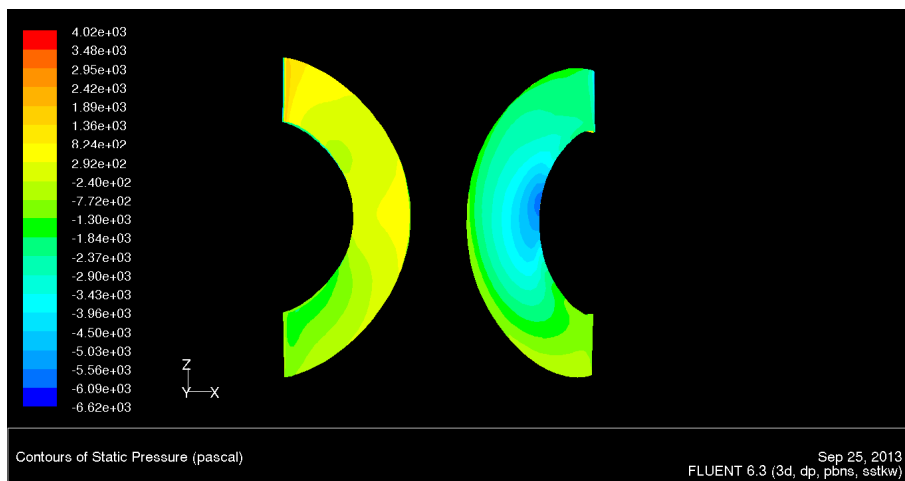


Figura 19: Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.175$

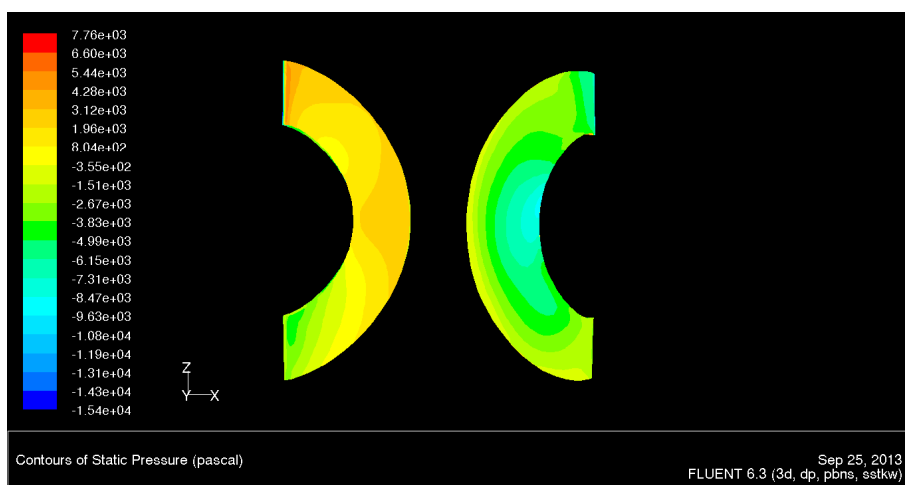


Figura 20: Pressão estática na superfície da pá do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.25$

### .3 Velocidade relativa à entrada do rotor

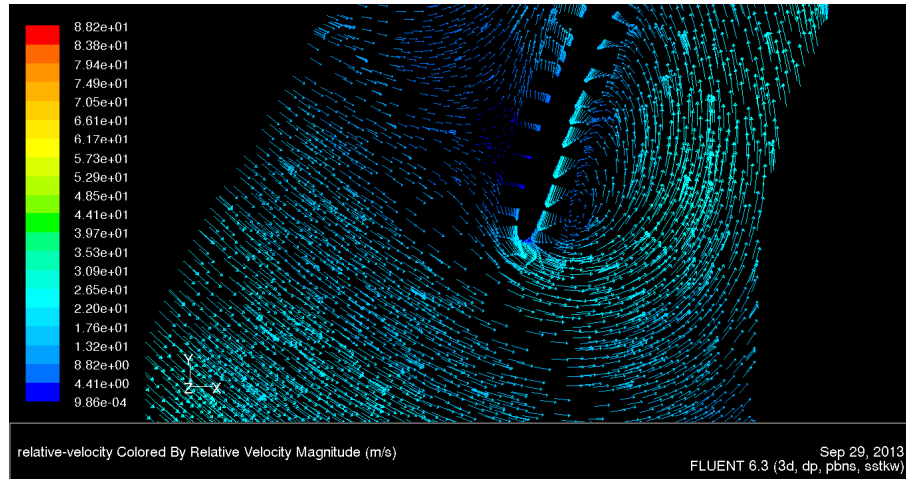


Figura 21: Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.05$

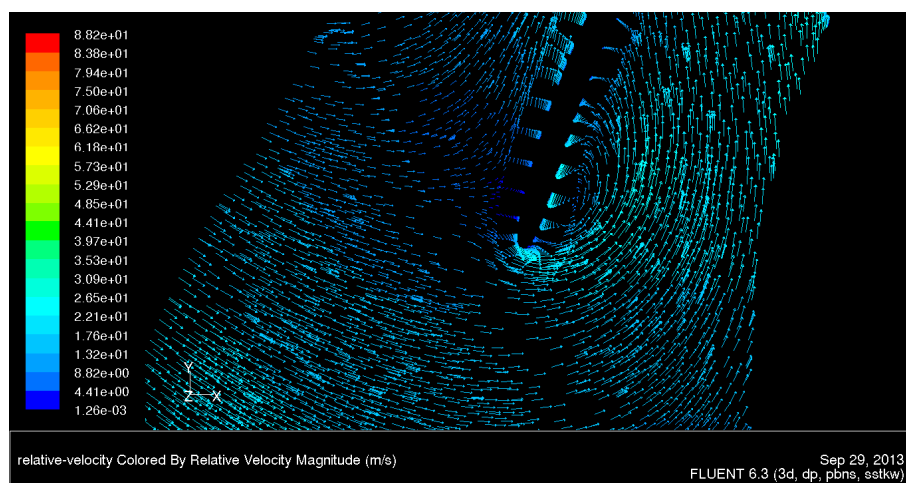


Figura 22: Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.06$

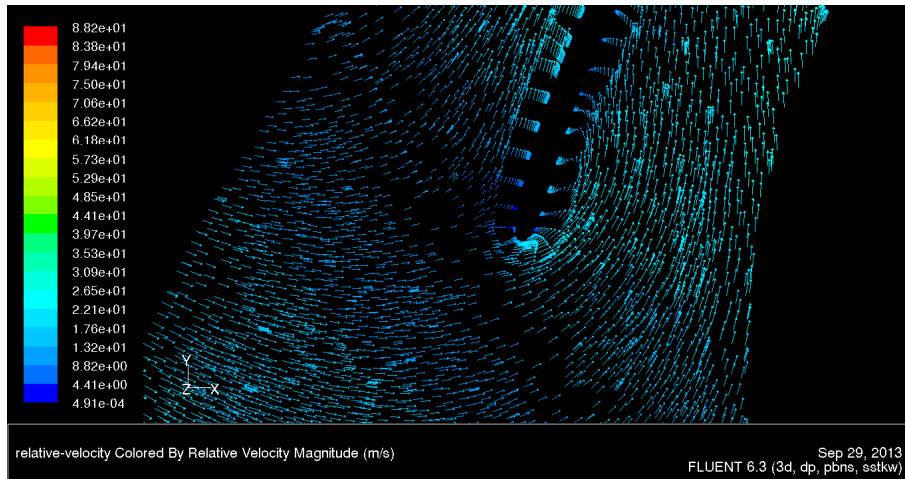


Figura 23: Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.07$

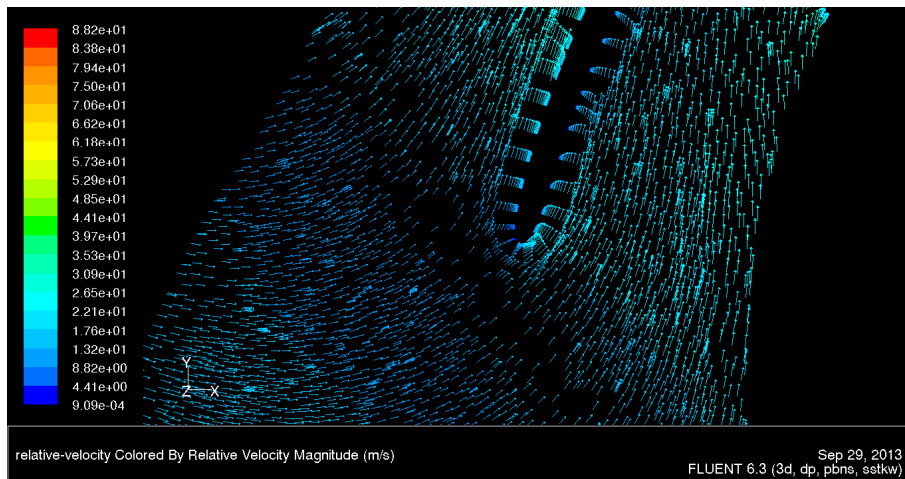


Figura 24: Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.08$

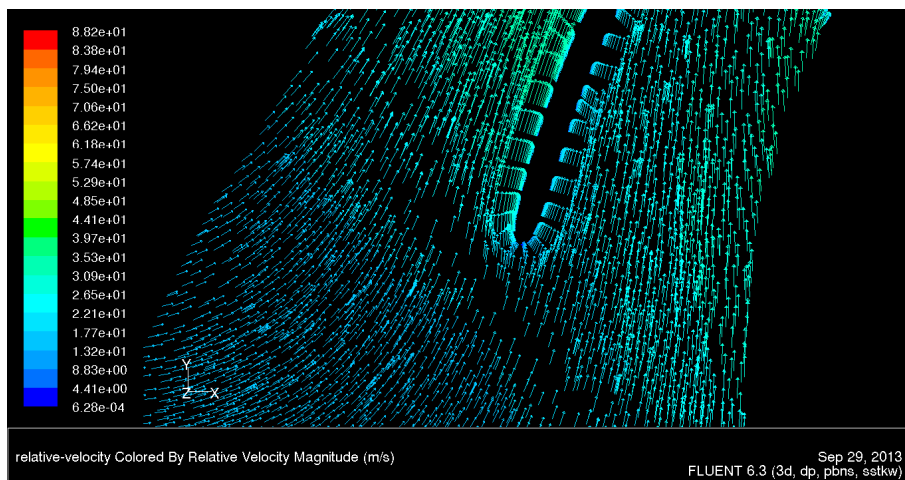


Figura 25: Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.1$

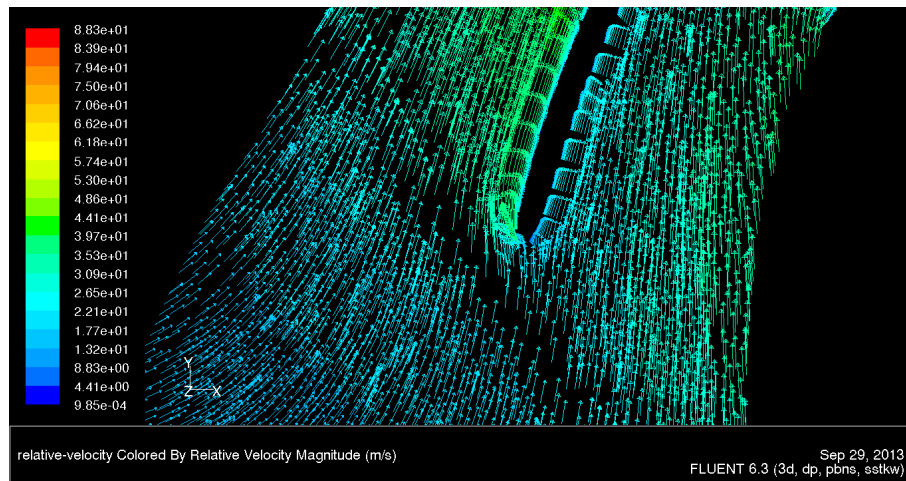


Figura 26: Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.1125$

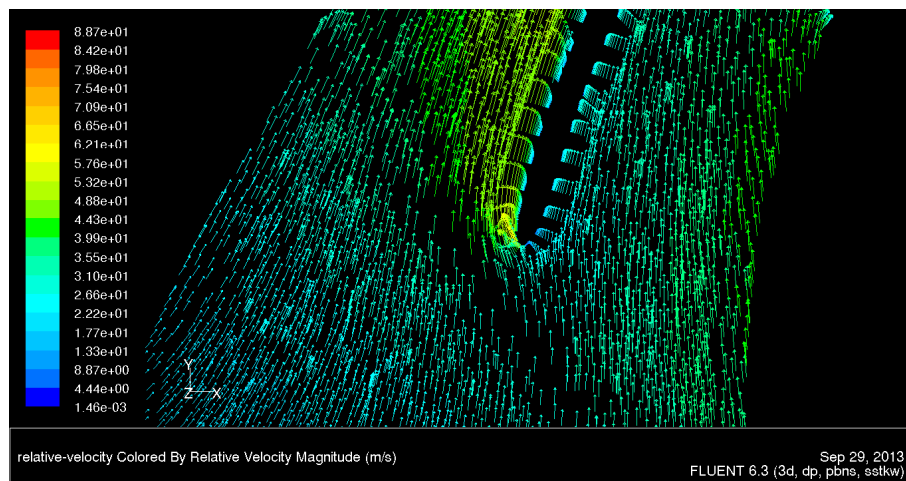


Figura 27: Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.132$

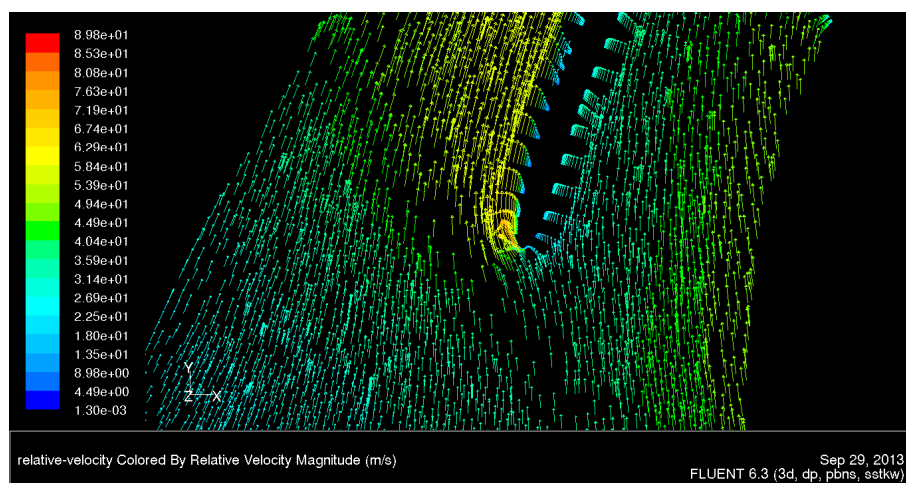


Figura 28: Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.15$

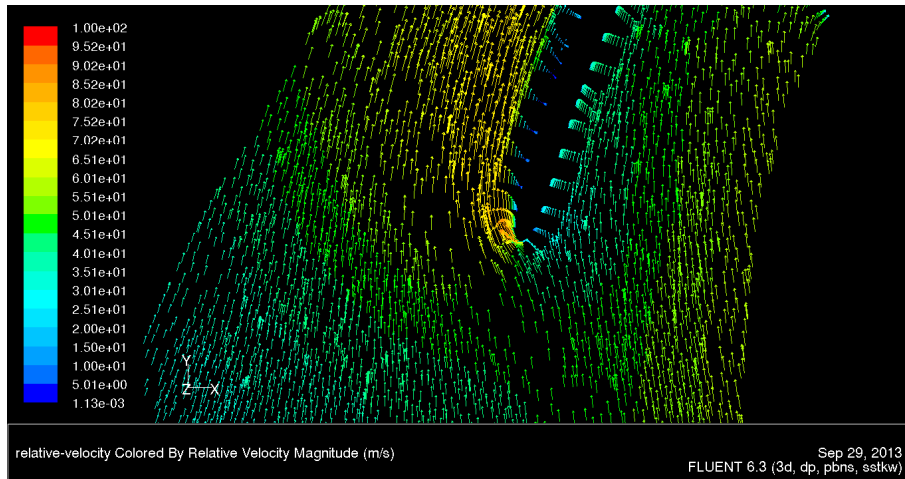


Figura 29: Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.175$

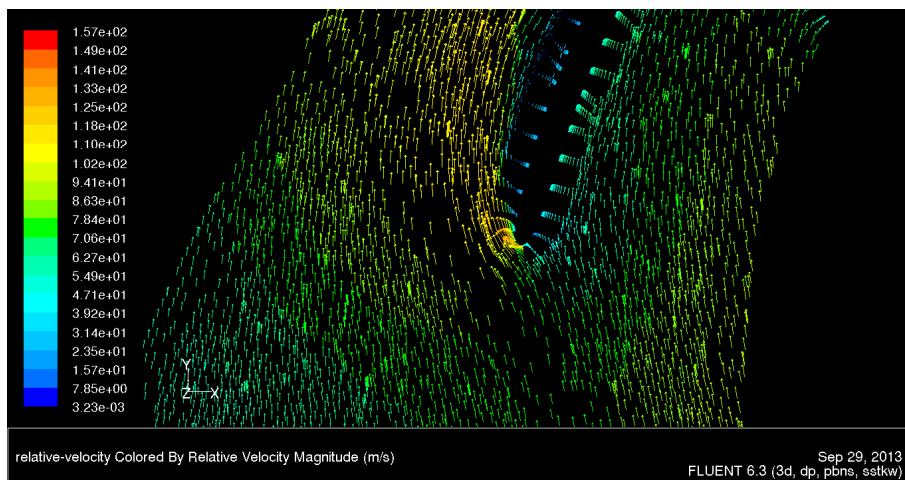


Figura 30: Vectores da velocidade relativa à entrada do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.25$

#### .4 Velocidade relativa à saída do rotor

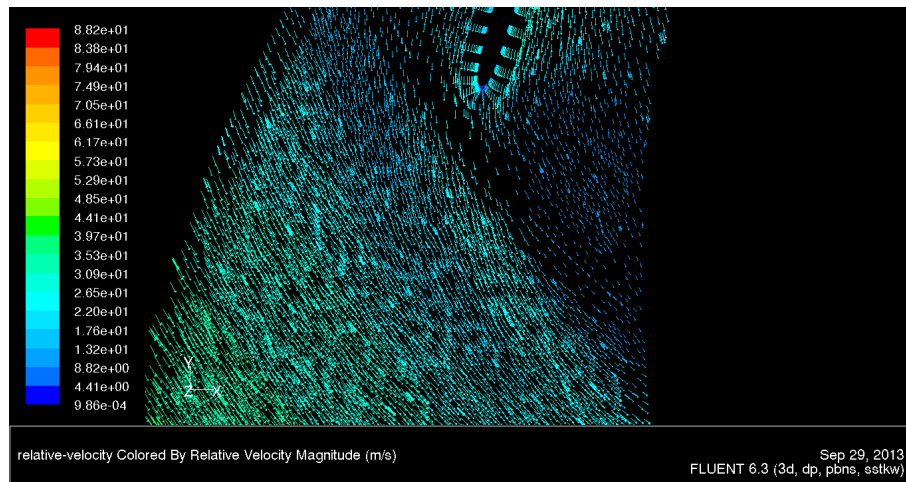


Figura 31: Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.05$

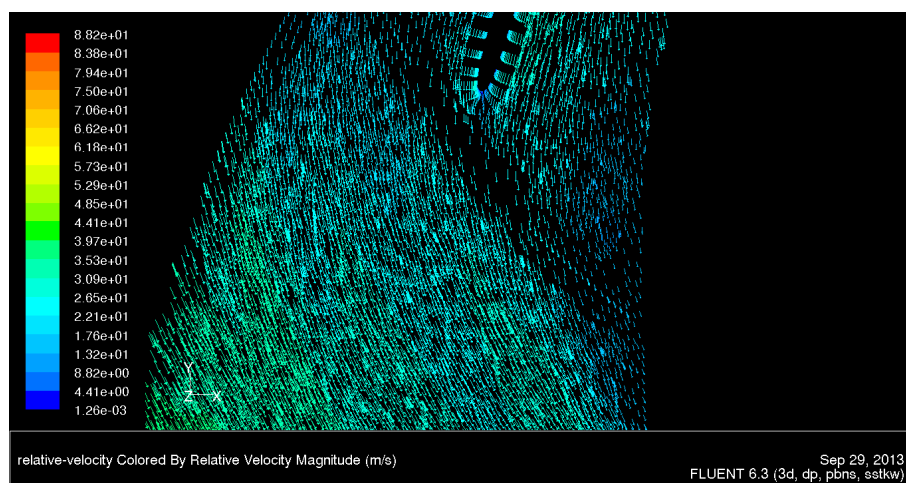


Figura 32: Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.06$



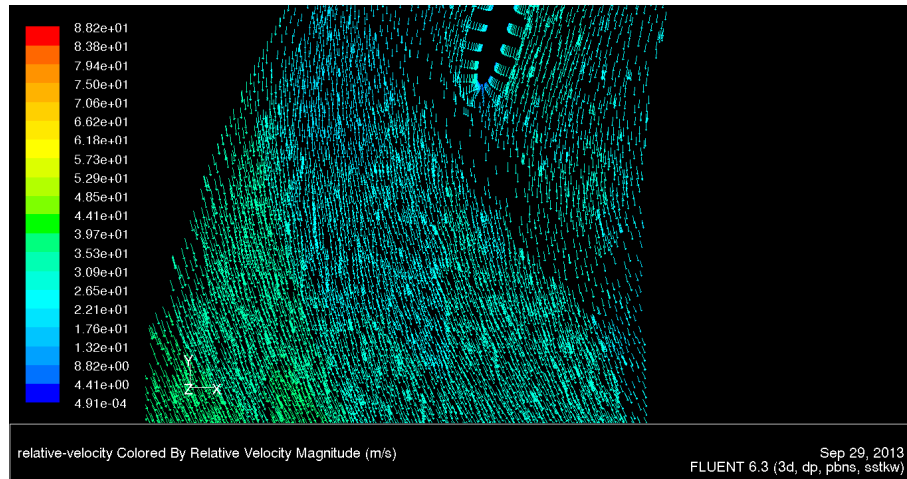


Figura 33: Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.07$

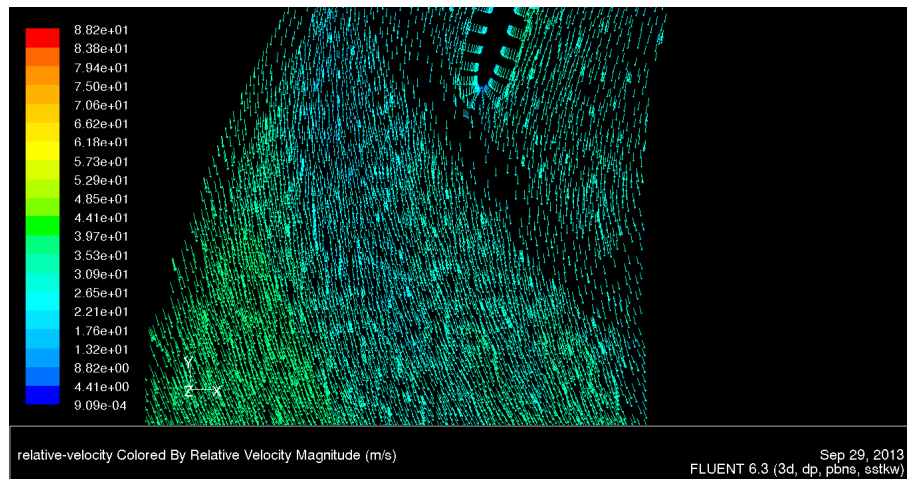


Figura 34: Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.08$

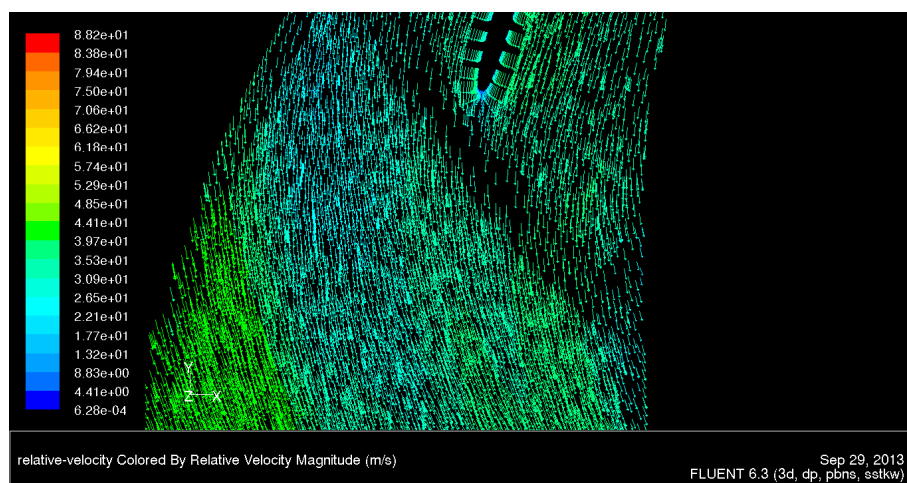


Figura 35: Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.1$



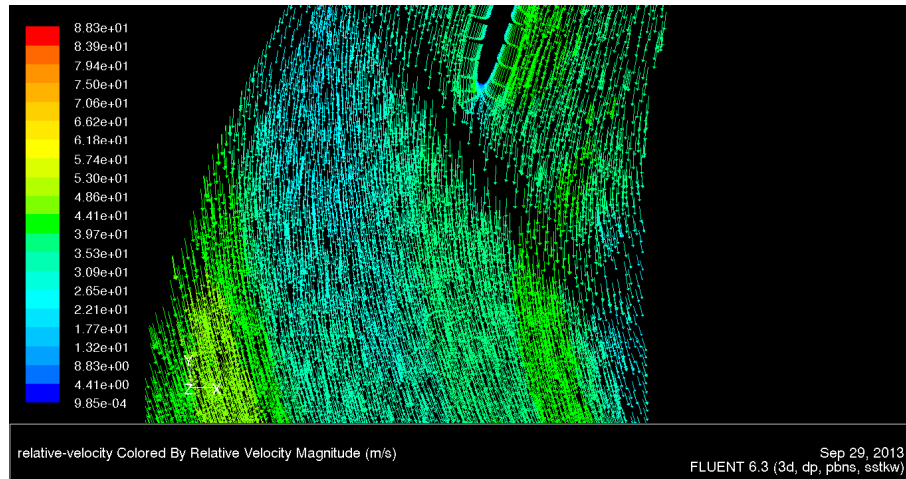


Figura 36: Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.1125$

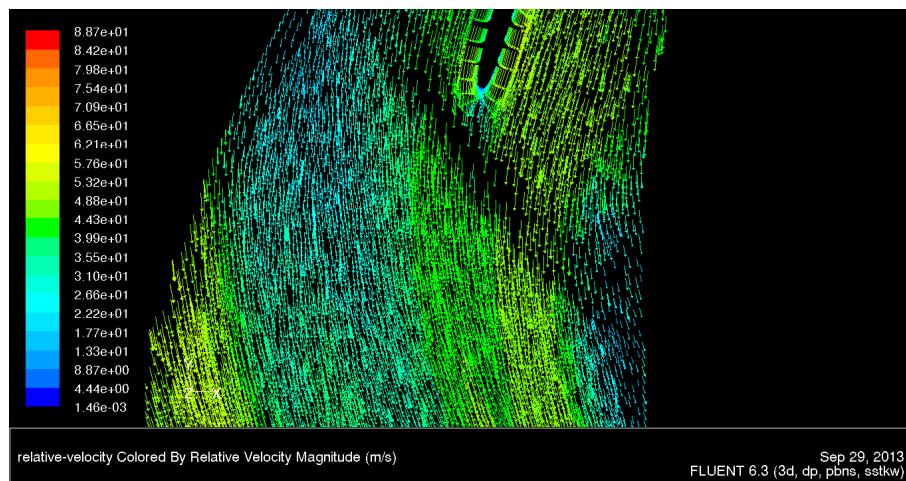


Figura 37: Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.132$

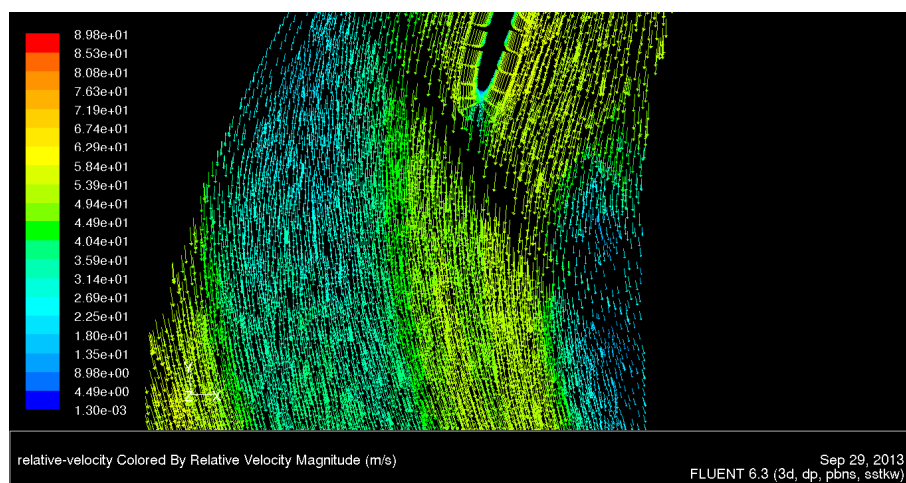


Figura 38: Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.15$

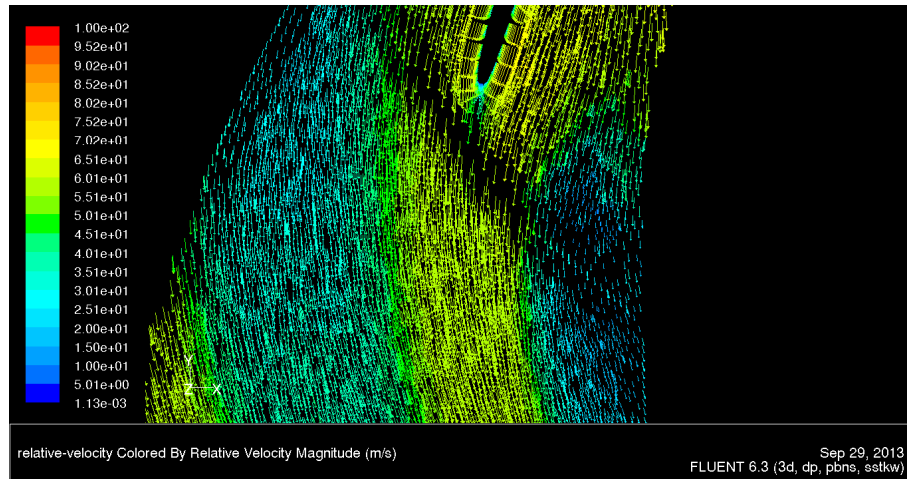


Figura 39: Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.175$

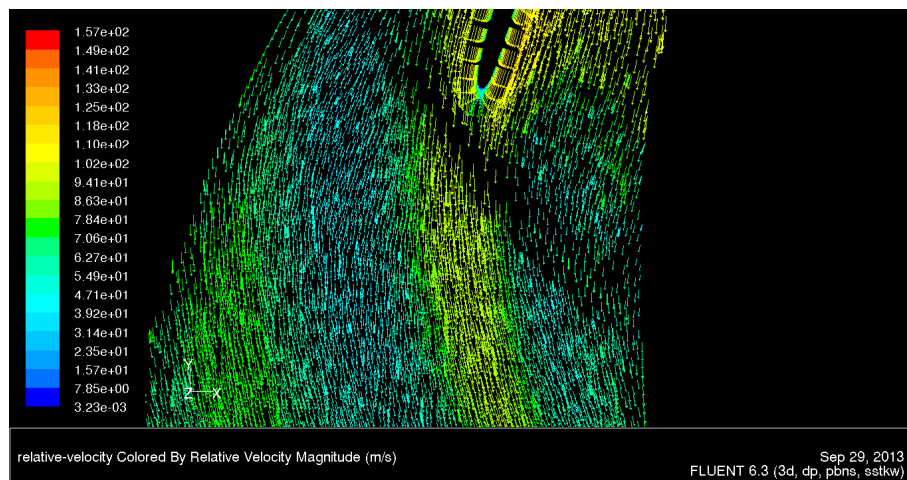


Figura 40: Vectores da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.25$

## .5 Perfis das velocidades relativas na secção de saída do rotor

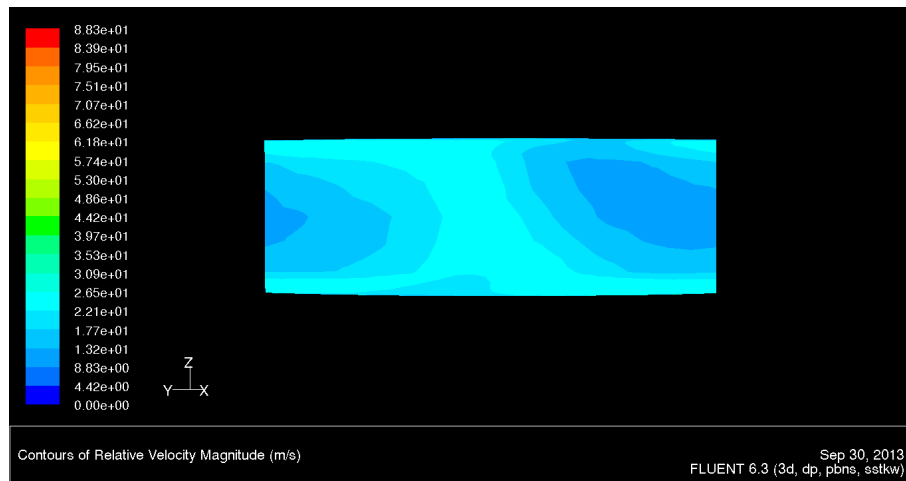


Figura 41: Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.05$

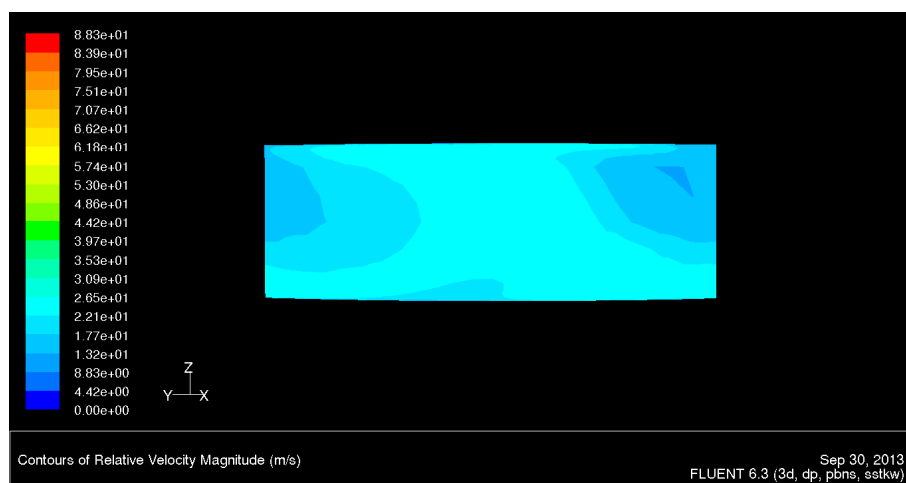


Figura 42: Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.06$

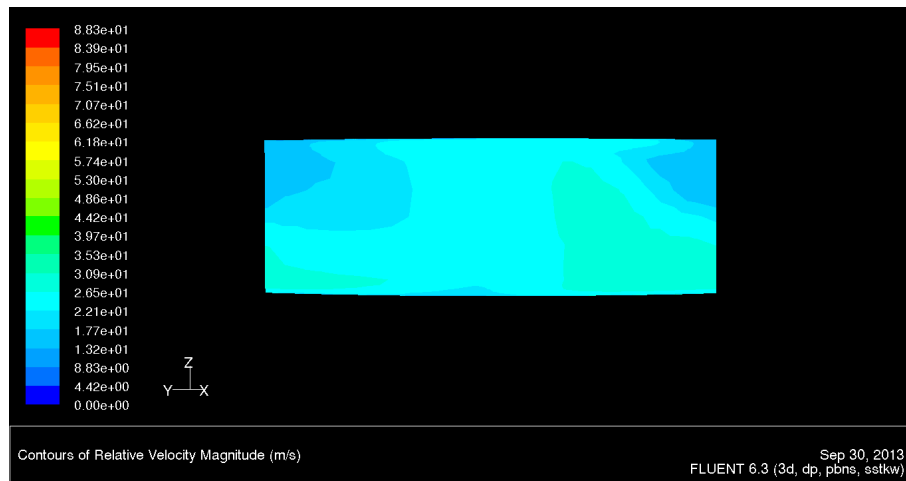


Figura 43: Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.07$

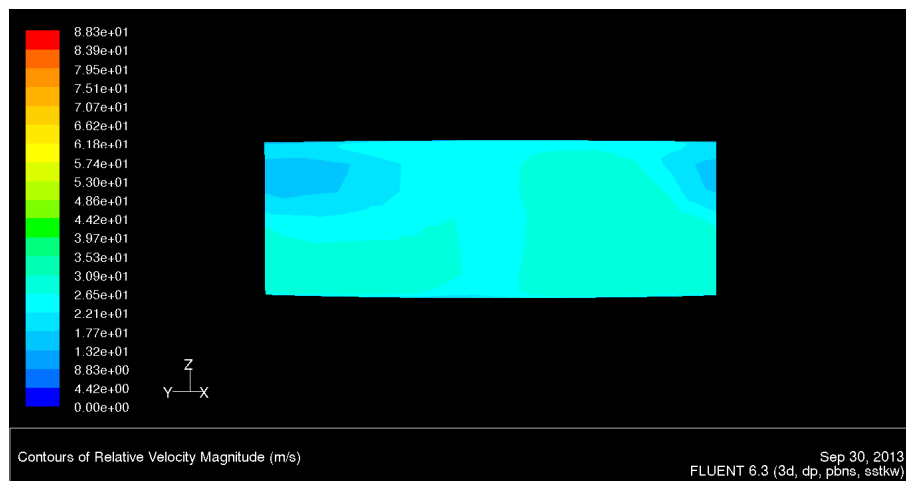


Figura 44: Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.08$

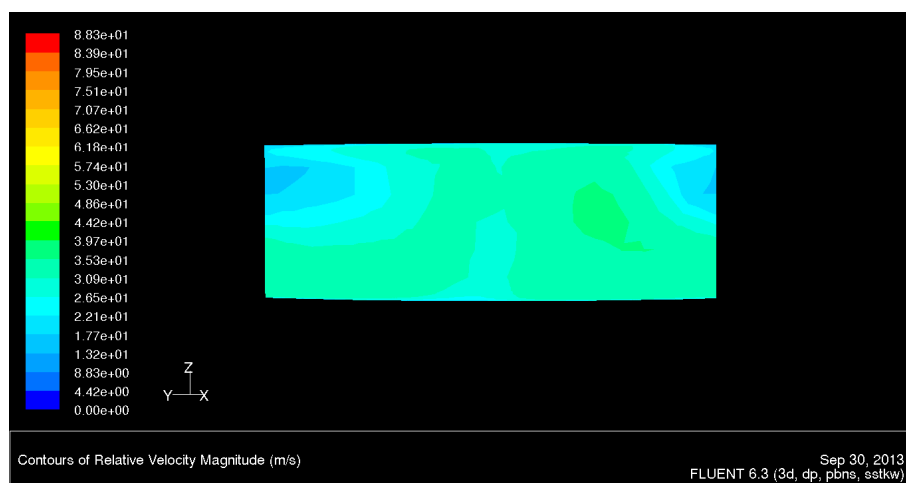


Figura 45: Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.1$

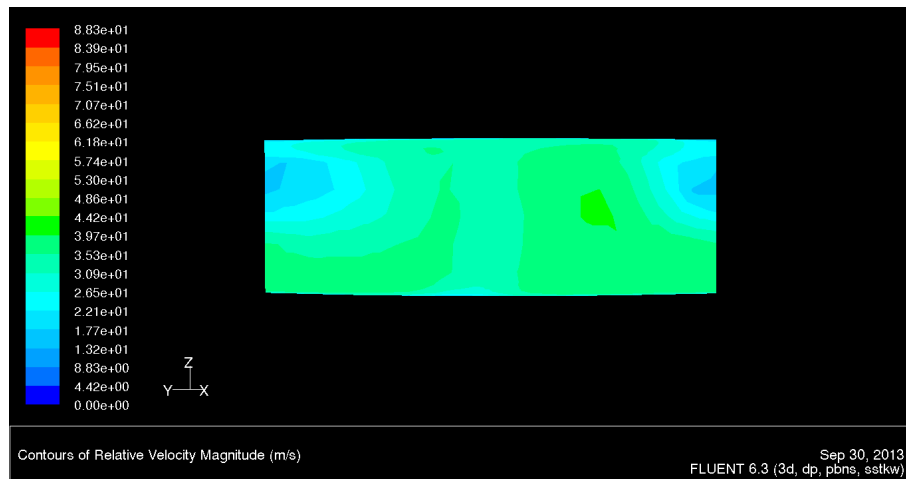


Figura 46: Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.1125$

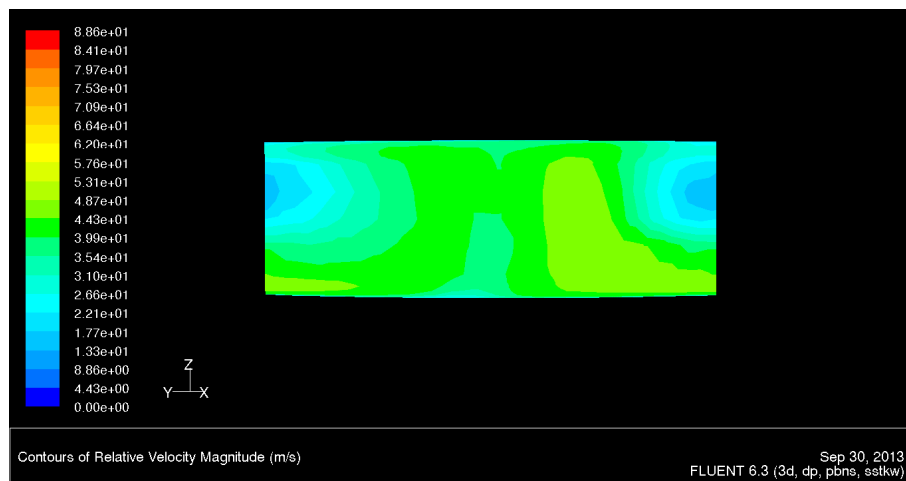


Figura 47: Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.132$

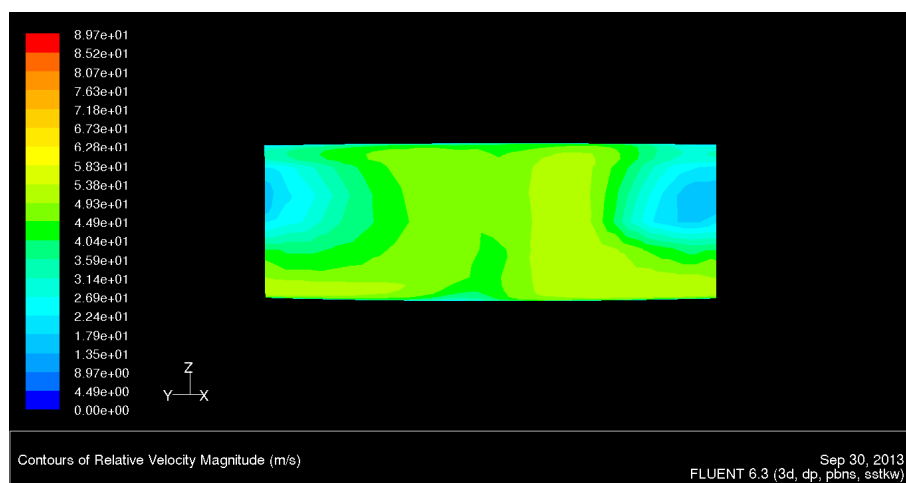


Figura 48: Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.15$

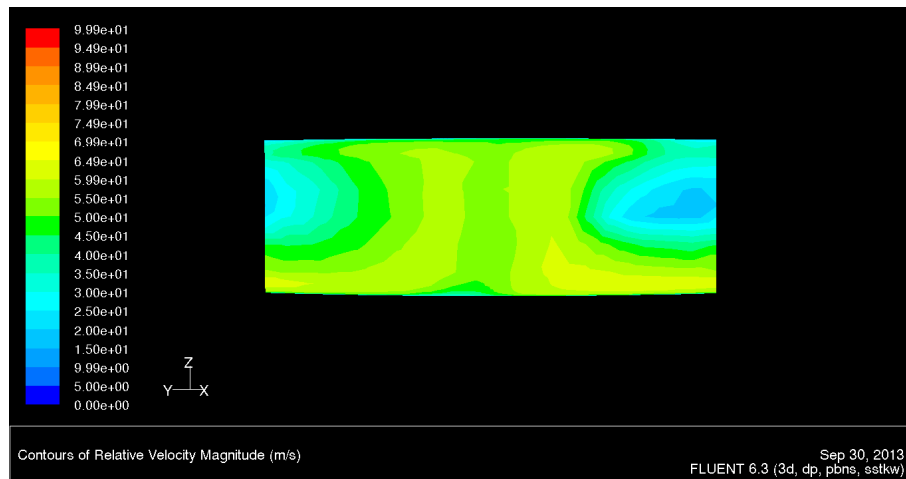


Figura 49: Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.175$

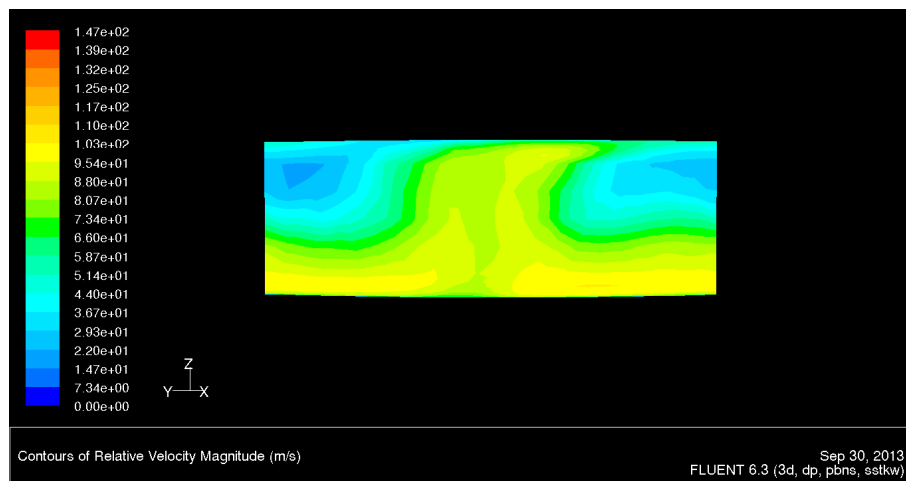


Figura 50: Magnitude da velocidade relativa à saída do rotor com 11 pás e  $\phi = 0.25$

# Códigos

Apresentam-se alguns dos códigos mais revelantes do trabalho efectuado.

## .6 Método de Newton para o cálculo das intersecções

```
def Newton_plan_prof( X1, Y1, Z1, X2, Y2, Z2, z_spline, r_spline, s0):

    u0 = 1.0
    theta0 = math.atan2( Y2, X2 )

    x = numpy.matrix( [ [u0], [s0], [theta0] ] )

    delta_X = X2 - X1
    delta_Y = Y2 - Y1
    delta_Z = Z2 - Z1

    for i in range( 0, 50 ):

        omega = 0.25 if i < 2 else 1.0

        u = x[0,0]
        s = x[1,0]
        theta = x[2,0]

        rs = r_spline.eval( s )
        zs = z_spline.eval( s )

        drs = r_spline.eval_deriv( s )
        dzs = z_spline.eval_deriv( s )

        #-----
        f = numpy.matrix(
            [ [ delta_X * u + X1 - rs * math.cos( theta ) ],
              [ delta_Y * u + Y1 - rs * math.sin( theta ) ],
              [ delta_Z * u + Z1 - zs ] ] )

        Df = numpy.matrix(
            [ [ delta_X, -drs * math.cos(theta), rs * math.sin(theta) ],
              [ delta_Y, -drs * math.sin(theta), -rs * math.cos(theta) ],
              [ delta_Z, -dzs, 0.0 ] ] )

        Delta = -omega * numpy.linalg.solve( Df, f )

        x += Delta

        #-----
        res = math.sqrt( ( Delta[0,0]**2 + Delta[1,0]**2 + Delta[2,0]**2 ) / 3.0 )

        s = x[1,0]
        theta = x[2,0]

        R4 = r_spline.eval( s )
        X4 = R4 * math.cos( theta )
        Y4 = R4 * math.sin( theta )
        Z4 = z_spline.eval( s )

        if res < 1E-12:
            return X4, Y4, Z4, s, R4, theta

    print "NOT converged!!!", res
    print X1, Y1, Z1, X2, Y2, Z2
    exit(1)
```



## .7 Método da bissecção para a determinação do parâmetro $s$ inicial

```
def Newton_initial_s( Z, vec_s, vec_z ):
    ascnd = ( vec_z[-1] >= vec_z[0] )
    jl = 0
    ju = len( vec_z ) - 1

    while( ju - jl > 1 ):
        jm = ( ju + jl ) / 2
        if ( Z >= vec_z[jm] ) == ascnd:
            jl = jm
        else:
            ju = jm

    return 0.5 * ( vec_s[jl] + vec_s[ju] )
```

## .8 Expansão da pá para a criação da malha do tipo O

```

=====
#Config data
#-----
K_layer   = 1.30
layer_pnts = 21

nt = 2 #number os camber lines
t_shr = 0 #shroud camber line index
t_hub = nt - 1 #hub camber line index

t_shr_to_hub = arange( 0.0, 1.0 + 1.0 / (nt - 1), 1.0 / (nt - 1) )

=====
#point distribution along blade B.L.
#-----
dist_BL = sucessive_ratio2_inc( K_layer, layer_pnts )

=====
#read files and create Shroud to Hub interpolators
#-----
n_blade, n_le, x_blade_intp, y_blade_intp, z_blade_intp = blade_sections( alfa_blade, blade_files )
n_mean, x_mean_intp, y_mean_intp, z_mean_intp = blade_camber_line( alfa_blade, mean_line_files )

=====
#Create Shroud and Hub blade sections and mean lines lists
#-----
n_te = n_blade - 1

blade_X = zeros( ( nt, n_blade ) )
blade_Y = zeros( ( nt, n_blade ) )
blade_Z = zeros( ( nt, n_blade ) )

mean_X = zeros( ( nt, n_mean ) )
mean_Y = zeros( ( nt, n_mean ) )
mean_Z = zeros( ( nt, n_mean ) )

layer_height = zeros( nt )

for it_sec in range( 0, nt ):

    t_sec = t_shr_to_hub[it_sec]

    # interpolate sections

    for i in range( 0, n_blade ):
        blade_X[it_sec,i] = x_blade_intp[i]( t_sec )
        blade_Y[it_sec,i] = y_blade_intp[i]( t_sec )
        blade_Z[it_sec,i] = z_blade_intp[i]( t_sec )

    for i in range( 0, n_mean ):
        mean_X[it_sec,i] = x_mean_intp[i]( t_sec )
        mean_Y[it_sec,i] = y_mean_intp[i]( t_sec )
        mean_Z[it_sec,i] = z_mean_intp[i]( t_sec )

    print "Section ", it_sec, t_sec

```

```

chord = 0.0

for i in range( 1, n_mean ):
    chord += sqrt( (mean_X[it_sec,i] - mean_X[it_sec,i-1])**2 + (mean_Y[it_sec,i] - mean_Y[it_sec,i-1])**2 + (mean_Z[it_sec,i] - m

print chord

# the first layer is the outer fluid "boundary layer"
layer_height[it_sec] = chord * 0.015

print " dist_BL[ 0] = ", layer_height[it_sec] * ( dist_BL[ 1] - dist_BL[ 0] )
print " dist_BL[-1] = ", layer_height[it_sec] * ( dist_BL[-1] - dist_BL[-2] )

#=====
#Outer layers normal to blade in Shroud and Hub
#-----
outer_layer_X = zeros( ( nt, n_blade ) )
outer_layer_Y = zeros( ( nt, n_blade ) )
outer_layer_Z = zeros( ( nt, n_blade ) )

u = zeros( ( nt, n_blade ) )

blade_spline_make_X=[]
blade_spline_make_Y=[]
blade_spline_make_Z=[]

blade_spline_X=[]
blade_spline_Y=[]
blade_spline_Z=[]

sx = zeros( nt )
sy = zeros( nt )
sz = zeros( nt )

for it_sec in range( 0, nt ):

    u[it_sec] = AdimCurveLength3D(blade_X[it_sec], blade_Y[it_sec], blade_Z[it_sec] )

    blade_spline_make_X.append( spline.cspline_periodic( len( u[it_sec] ) ) )
    blade_spline_make_Y.append( spline.cspline_periodic( len( u[it_sec] ) ) )
    blade_spline_make_Z.append( spline.cspline_periodic( len( u[it_sec] ) ) )

    blade_spline_make_X[it_sec].init( u[it_sec], blade_X[it_sec] )
    blade_spline_make_Y[it_sec].init( u[it_sec], blade_Y[it_sec] )
    blade_spline_make_Z[it_sec].init( u[it_sec], blade_Z[it_sec] )

    blade_spline_X.append( blade_spline_make_X[it_sec].eval_vector( u[it_sec] ) )
    blade_spline_Y.append( blade_spline_make_Y[it_sec].eval_vector( u[it_sec] ) )
    blade_spline_Z.append( blade_spline_make_Z[it_sec].eval_vector( u[it_sec] ) )

```

```

for i in range( 0, n_blade ):

    for it_sec in range( 0, nt ):
        sx[it_sec] = blade_spline_X[it_sec][i]
        sy[it_sec] = blade_spline_Y[it_sec][i]
        sz[it_sec] = blade_spline_Z[it_sec][i]
    del it_sec

    t_lst = AdimCurveLength3D( sx, sy, sz )

    sx_spline = spline.linear( len( t_lst ) )
    sy_spline = spline.linear( len( t_lst ) )
    sz_spline = spline.linear( len( t_lst ) )

    sx_spline.init( t_lst, sx )
    sy_spline.init( t_lst, sy )
    sz_spline.init( t_lst, sz )

    for it_sec in range( 0, nt ):

        nx_xi = blade_spline_make_X[it_sec].eval_deriv( u[it_sec,i] )
        ny_xi = blade_spline_make_Y[it_sec].eval_deriv( u[it_sec,i] )
        nz_xi = blade_spline_make_Z[it_sec].eval_deriv( u[it_sec,i] )
        norm = math.sqrt( nx_xi*nx_xi + ny_xi*ny_xi + nz_xi*nz_xi )
        nx_xi /= norm
        ny_xi /= norm
        nz_xi /= norm

        nsx_zeta = sx_spline.eval_deriv( t_lst[it_sec] )
        nsy_zeta = sy_spline.eval_deriv( t_lst[it_sec] )
        nsz_zeta = sz_spline.eval_deriv( t_lst[it_sec] )
        norm = math.sqrt( nsx_zeta*nsx_zeta+nsy_zeta*nsy_zeta+nsz_zeta*nsz_zeta )
        nsx_zeta /= norm
        nsy_zeta /= norm
        nsz_zeta /= norm

        nx_eta = -nz_xi * nsy_zeta + ny_xi * nsz_zeta
        ny_eta =  nz_xi * nsx_zeta - nx_xi * nsz_zeta
        nz_eta = -ny_xi * nsx_zeta + nx_xi * nsy_zeta
        norm = math.sqrt( nx_eta*nx_eta + ny_eta*ny_eta + nz_eta*nz_eta )
        nx_eta /= norm
        ny_eta /= norm
        nz_eta /= norm

        nx_zeta = -nz_eta * ny_xi + ny_eta * nz_xi
        ny_zeta =  nz_eta * nx_xi - nx_eta * nz_xi
        nz_zeta = -ny_eta * nx_xi + nx_eta * ny_xi

        x_0 = blade_spline_X[it_sec][i]
        y_0 = blade_spline_Y[it_sec][i]
        z_0 = blade_spline_Z[it_sec][i]

        if it_sec == 0 and i == n_blade-10:
            x_zeta = sx_spline.eval_vector( t_lst )
            y_zeta = sy_spline.eval_vector( t_lst )
            z_zeta = sz_spline.eval_vector( t_lst )

        xi = 0.0
        eta = layer_height[it_sec]
        zeta = 0.0

```

```

outer_layer_X[it_sec,i] = xi*nx_xi+eta*nx_eta+zeta*nx_zeta+x_0
outer_layer_Y[it_sec,i] = xi*ny_xi+eta*ny_eta+zeta*ny_zeta+y_0
outer_layer_Z[it_sec,i] = xi*nz_xi+eta*nz_eta+zeta*nz_zeta+z_0

#=====
#Blade BL interpolation in Shroud and Hub
#-----
mblade = n_blade - 1
mlayer = layer_pnts - 1
mt = nt - 1

layer_X = zeros( ( nt, n_blade, layer_pnts ) )
layer_Y = zeros( ( nt, n_blade, layer_pnts ) )
layer_Z = zeros( ( nt, n_blade, layer_pnts ) )

for it_sec in range( 0, nt ):

    print "GRID Boundary Layer", it_sec

    ux = blade_spline_X[ it_sec ]
    uy = blade_spline_Y[ it_sec ]
    uz = blade_spline_Z[ it_sec ]

    nx = outer_layer_X[ it_sec ]
    ny = outer_layer_Y[ it_sec ]
    nz = outer_layer_Z[ it_sec ]

    ##-----
    for i in range( 0, n_blade ):
        layer_X[it_sec,i,0] = ux[i]
        layer_Y[it_sec,i,0] = uy[i]
        layer_Z[it_sec,i,0] = uz[i]

        layer_X[it_sec,i,mlayer] = float( nx[i] )
        layer_Y[it_sec,i,mlayer] = float( ny[i] )
        layer_Z[it_sec,i,mlayer] = float( nz[i] )

    ##-----
    ## interpolate
    for i in range( 0, n_blade ):
        x0 = layer_X[it_sec,i,0]
        y0 = layer_Y[it_sec,i,0]
        z0 = layer_Z[it_sec,i,0]

        xl = layer_X[it_sec,i,mlayer]
        yl = layer_Y[it_sec,i,mlayer]
        zl = layer_Z[it_sec,i,mlayer]

    for j in range( 0, layer_pnts ):
        om = dist_BL[j]
        mo = 1.0 - om

        layer_X[it_sec,i,j] = x0 * mo + xl * om
        layer_Y[it_sec,i,j] = y0 * mo + yl * om
        layer_Z[it_sec,i,j] = z0 * mo + zl * om

```